ИЗДАНІЕ МОСКОВСКАГО ПСИХОЛОГИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА
ПРИ СОДѢЙСТВІИ С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО ФИЛОСОФСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВОПРОСЫ ФИЛОСОФІИ
и
ПСИХОЛОГІИ.

ЖУРНАЛЪ,

основанный проф. Н. Я. Гротомъ и А. А. Абрикосовымъ.

ГОДЪ XIX.

Подъ редакціей *Л. М. Лопатина.*

Книга IV (94).

СЕНТЯБРЬ-ОКТЯБРЬ.—1908 г.

МОСКВА.
Типо-литографія Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.
Пименовская ул., соб. домъ.

СОДЕРЖАНІЕ.

Психологія математическаго мышленія.

Введеніе.

Современная эмпирическая психологія, идя по пути других эмпирическихъ наукъ. кропотливо собираетъ факты, чтобы не иначе, какъ опираясь на нихъ, получить общіе выводы, относящіеся къ различнымъ явленіямъ психической жизни. При этомъ очевидно, какое значеніе должны имѣть для психологіи всевозможныя монографіи, относящіяся къ различнымъ, порой весьма спеціальнаго характера, явленіямъ.

Эти монографіи являются часто драгоцѣнными хранилищами фактическихъ данныхъ. Но этимъ не ограничивается ихъ значеніе для болѣе общаго характера вопросовъ психологіи.

Изучая какую-либо спеціальную душевную способность, напримѣръ, талантъ художника или поэта мы встрѣчаемся съ болѣе яркими и болѣе дифференцированными проявленіями различныхъ психическихъ способностей, чѣмъ тѣ, которыя мы можемъ замѣтить, наблюдая психическую жизнь съ болѣе общихъ точекъ зрѣнія. Изучая, напримѣръ, фантазію поэта, мы правда изучаемъ фантазію съ спеціальной окраской, но безспорно, что въ этомъ изученіи мы черпаемъ и болѣе глубокія познанія о фантазіи вообще, такъ какъ поэзія это именно та область, гдѣ эта способность является въ наибольшемъ своемъ блескѣ.

Во французской психологической литературѣ мы находимъ отдѣльныя психологіи спеціальныхъ способностей: Вниманія, Памяти, Страсти (Рибо), Смѣха, Трусости (Дюгасъ), Радости и Грусти (Дюма) и т. д., затѣмъ психологію различныхъ профессій музыканта (Дорьяко), художника (Арреа) и т. д.

Намъ представляется не лишенной интереса и значенія и психологія ученыхъ разнаго рода, среди которыхъ особенное вниманіе заслуживаетъ *психологія математика* и главнымъ образомъ не психологія характера, а *психологія мышленія*.

Въ виду совершенно специфическаго характера математическаго мышленія и математическаго таланта такого рода монографія была бы въ особенности интересна.

Чѣмъ умъ математика отличается отъ ума другого ученаго? Можетъ ли всякій даровитый ученый стать хорошимъ математикомъ? Можетъ ли способность къ математикѣ считаться мѣриломъ ума?

Тотъ фактъ, что такія свѣтила, какъ Гете и Дарвинъ сознавались въ полной своей неспособности къ математикѣ, указываетъ на то, что способность къ математикѣ не всегда присуща даже геніальнымъ людямъ, что между математическимъ умомъ и нематематическимъ есть существенная разница, изслѣдовать которую представляетъ большой интересъ для психологіи.

Предлагаемый нами краткій трудъ на эту тему отнюдь не представляетъ работъ вполнѣ въ духѣ французской психологической школы. Мы не имѣемъ возможности собрать достаточно фактовъ. Въ то время, какъ поэты и художники о себѣ пишутъ много и порой даже слишкомъ много, математики при своей объективности въ противоположность субъективности поэтовъ говорятъ о себѣ очень мало, а чаще даже совсѣмъ не говорятъ.

Отъ недостатка фактическихъ данныхъ, а равнымъ образомъ отъ того, что изслѣдуемая область заключается въ области на нашъ взглядъ еще мало изслѣдованной, а именно въ психологіи мышленія, выводы наши могутъ мѣстами показаться нѣсколько смѣлыми и значительно выходящими за рамки намѣченной нами темы.

Мы позволяемъ себѣ назвать психологію мышленія малоизслѣдованной, несмотря на широко развитую теорію ассоціаціи, такъ какъ послѣдняя, по нашему мнѣнію, скорѣе относится къ свободному теченію представленій, къ мышленію образами, но не къ отвлеченному мышленію понятіями математика, и едва ли она даетъ разгадку тому, какимъ образомъ математикъ можетъ съ большей или меньшей скоростью и съ большей или меньшей удачей вызывать въ мысли длинную цѣпь умозаключеній, ведущихъ его къ намѣченной цѣли.

Намъ кажется, что при всѣхъ этихъ недостаткахъ предлагаемая въ настоящей статьѣ попытка можетъ имѣть нѣкоторое значеніе главнымъ образомъ потому, что она написана спеціалистомъ-математикомъ. На мѣстѣ фактовъ, собранныхъ отъ многихъ лицъ, у насъ стоитъ самонаблюденіе, которое конечно мы не претендуемъ считать равносильнымъ тѣмъ богатымъ фактическимъ матеріаламъ, которые даются въ вышеупомянутыхъ французскихъ монографіяхъ. Мы льстили себя надеждой, что можетъ быть эта еще не вполнѣ совершенная попытка вызоветъ другія болѣе удачныя, вызоветъ собираніе болѣе полнаго фактическаго матеріала и болѣе строго на нихъ обоснованныхъ выводовъ.

§ 1. Закулисная работа математической мысли.

Въ математическомъ мышленіи слѣдуетъ различать два процесса: *постановку проблемы и ея рѣшеніе.*

Первый процессъ вовсе не сокращается до произвольнаго выбора. Научнымъ математическимъ мышленіемъ не можетъ быть названо послѣдовательное рѣшеніе ряда уравненій, произвольно нами написанныхъ. Взятая для рѣшенія проблема не выбирается, скорѣй разыскивается. Научную цѣнность она пріобрѣтаетъ только тогда, если она полезна для науки.

Подъ пользой слѣдуетъ разумѣть отнюдь не практическую жизненную пользу, а значеніе проблемы для стройности и простоты всей науки, какъ синтеза различныхъ дисциплинъ въ томъ смыслѣ, что рѣшеніе этой проблемы можетъ создать большую гармонію между различными ея частями указывая, что

1) нѣкоторыя истины представляютъ только частные случаи болѣе общихъ,

2) что части на первый взглядъ грубыя и разнородныя имѣютъ между собой интимную связь и, наконецъ,

3) что къ уже открытымъ истинамъ черезъ рядъ новыхъ проблемъ открывается болѣе простой и скорый путь.

Конечно, для успѣшной постановки подобнаго рода проблемы главнымъ необходимымъ условіемъ является *творческое воображеніе.* Оцѣнка проблемы предполагаетъ иногда какъ бы напередъ ея рѣшеніе. Для того, чтобы утверждать, что данное положеніе служитъ звеномъ, связующимъ болѣе краткимъ путемъ два положенія, слѣдуетъ знать это положеніе.

Относительно положенія: всѣ B суть D мы не можемъ утверждать, что его связуетъ положеніе A есть B и A есть C, раньше чѣмъ не узнаемъ что всѣ D суть C. Такимъ образомъ уже при самомъ выборѣ проблемы иногда необходимо дѣлать *гипотезу*, необходима не точная цѣпь силлогизмовъ, а воображеніе.

Процессъ разысканія рѣшенія поставленной проблемы начинается съ составленія *гипотетическаго плана ея рѣшенія*, разбивая ее на нѣсколько частныхъ вопросовъ, рѣшеніе которыхъ по нашему разсчету приводитъ насъ къ рѣшенію интересующей насъ проблемы. Такъ при рѣшеніи геометрической задачи на опредѣленіе какой-либо геометрической величины черезъ другія, мы разсчитываемъ придти къ опредѣленію неизвѣстнаго черезъ послѣдовательное опредѣленіе другихъ неизвѣстныхъ. Приступая къ рѣшенію перваго вопроса, а затѣмъ въ случаѣ удачи второго и всѣхъ остальныхъ вопросовъ, мы первымъ дѣломъ *прибѣгаемъ къ памяти, стараясь подвести его, какъ частный случай, подъ уже извѣстныя намъ проблемы.*

Только въ случаѣ неудачи, которая можетъ явиться слѣдствіемъ, какъ недостаточнаго запаса познаній, такъ и неимѣнія вполнѣ подходящихъ методовъ въ современной стадіи развитія науки, мы приступаемъ къ самостоятельному разысканію рѣшенія. Если мы теперь проанализируемъ эти розыски, то увидимъ, что *закулисная сторона точнаго мышленія носитъ совсѣмъ другой характеръ, чѣмъ тотъ рядъ теоремъ въ готовомъ и законченномъ видѣ, каждый членъ котораго не колеблясь тянетъ послѣдующіе.*

Точный разумъ, двигающій эту цѣпь теоремъ повернутъ спиной по направленію своего движенія; онъ видитъ тотъ путь, который прошелъ, но не видитъ того, который ему слѣдуетъ пройти. Одинъ онъ шелъ бы дѣйствительно впередъ; изъ посылки онъ вполнѣ точно выводилъ бы заключеніе, но онъ никогда бы не зналъ, куда идетъ, онъ не могъ бы рѣшить ни одной напередъ поставленной задачи. Рѣшеніе какой бы то ни было задачи, не подходящей прямо подъ общій случай, дѣлающій рѣшеніе чисто механическимъ, требуетъ помощи *гипотезирующаго и колеблющагося разума*. Мы дѣлаемъ рядъ *попытокъ* болѣе или менѣе удачныхъ при нахожденіи рѣшенія. Конечно, при выборѣ различныхъ путей для рѣшенія мы не предоставлены вполнѣ игрѣ воображенія. Главнымъ двигателемъ здѣсь является *аналогія*. Если намъ приходитъ въ голову та или иная попытка, такъ именно потому, что она увѣнчалась успѣхомъ въ аналогичныхъ случаяхъ. Что же касается до степени аналогіи даннаго случая съ случаемъ извѣстнымъ, то эта аналогія можетъ быть весьма поверхностной. Если намъ дано какое-либо дифференціальное уравненіе, то, отчаявшись подвести это уравненіе подъ уже извѣстные типы, мы стараемся проинтегрировать его, примѣняя различные методы, примѣнявшіеся къ интегрированію другихъ аналогичныхъ дифференціальныхъ уравненій. Но очевидно, что тѣ аналогіи, которыя заставляютъ блуждающую мысль остановиться на той или другой методѣ, часто не идутъ дальше внѣшняго вида предложеннаго уравненія. Вполнѣ естественно, если математику въ тотъ моментъ, когда онъ убѣдится, что уравненіе:

$$(a_0x+b_0)y^{(n)}+(a_1x+b_1)y^{(n-1)}+\dots(a_{n-1}x+b_{n-1})y'y^1+(a_n x+b_n)y=o$$

не подходитъ ни подъ одинъ изъ извѣстныхъ ему типовъ дифференціальныхъ уравненій, придетъ на мысль попытка интегрировать это уравненіе подстановкой $y=e^{ax}$, какъ линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами. Конечно, такая мысль придетъ только вслѣдствіе чисто внѣшней аналогіи формы этихъ двухъ весьма различныхъ по своимъ свойствамъ уравненій.

У опытнаго математика не будетъ детальнаго проведенія этой попытки, приводящей, конечно, къ неудачѣ. Такая мысль пробѣжитъ въ одинъ моментъ поле его сознанія, такъ какъ при привычной ему быстротѣ въ этой области соображенія, неудача ему будетъ почти очевидна. Но начинающій воспроизведетъ всѣ выкладки.

Возьмемъ болѣе сложный примѣръ. Извѣстно, что Эйлеровское уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

гдѣ $R(x)$ полиномъ 4-ой степени имѣетъ алгебраическій интегралъ. Обобщеніе Эйлеровскихъ изслѣдованій на случай, когда $R(x)$ полиномъ какой угодно степени можетъ имѣть интересъ и значеніе для науки. Безспорно, что не одинъ изслѣдователь, до развитія теоріи ультра-эллиптическихъ интеграловъ, дѣлалъ попытки обобщенія, при этомъ конечно онъ вполнѣ довѣрялся построенной имъ гипотезѣ о возможности существованія алгебраическаго интеграла у обобщеннаго Эйлеровскаго уравненія. Приступая затѣмъ къ интегрированію такого уравненія, этотъ изслѣдователь не обладалъ другимъ оружіемъ, кромѣ заключенія по аналогіи, и конечно первой мыслью у него должна была бы явиться попытка примѣненія къ тому же уравненію тѣхъ методовъ, которые употреблялъ Эйлеръ для своего уравненія; эта попытка не увѣнчалась бы успѣхомъ, такъ какъ при производствѣ выкладокъ обнаружилось, что успѣхъ Эйлеровской методы зависитъ отъ сокращенія нѣкоторыхъ членовъ, которые не сократятся въ общемъ случаѣ, и поэтому въ извѣстномъ пунктѣ цѣпь разсужденій обрывается. Въ этомъ примѣрѣ мы видимъ не только ошибочность предположенія, относящагося къ методѣ рѣшенія предложенной проблемы, но и ошибочность сдѣланнаго предположенія относительно результата, который придаетъ главнымъ образомъ цѣнность изслѣдуемой проблемѣ.

Подобное описаніе механизма закулисной работы математической мысли согласно съ показаніями математиковъ.

«Въ разговорѣ о роли воображенія въ научныхъ трудахъ,— говоритъ Либихъ,—одинъ великій французскій математикъ выразилъ мнѣніе, что *большинство математическихъ истинъ пріобрѣтены не дедукціей, а воображеніемъ*».

Цитируя это мѣсто, Рибо [1]) справедливо замѣчаетъ, что этотъ математикъ могъ бы сказать *«всѣ»*, не сдѣлавъ ошибки.

«Всякое математическое открытіе—сперва гипотеза, которую слѣдуетъ доказать, т.-е. привести къ общимъ принципамъ, предварительно установленнымъ; передъ рѣшительнымъ моментомъ раціональной провѣрки, она только воображаема»...

Мы съ своей стороны должны сдѣлать только слѣдующую поправку: эта гипотеза не только воображаема, она выбрана не пустой игрой воображенія, она есть плодъ или аналогіи, какъ мы упомянули выше, или индукціи, какъ гипотеза эмпирической науки.

«Разсужденіе,—говоритъ также Рибо,—это только средство контроля и провѣрки; оно преобразуетъ трудъ воображенія въ слѣдствія допустимыя и наличныя. Если предварительно не воображали, методъ безъ цѣли и безъ употребленія, такъ какъ невозможно разсуждать о совершенно неизвѣстномъ.

---

[1]) *Рибо* (Ribot) Sur l'imagination creatrice p. 205.

Даже, когда кажется, что проблема движется одна къ рѣшенію однимъ разсужденіемъ, воображеніе входитъ безпрестанно подъ формой ряда попытокъ»...

§ 2. Синтезъ и анализъ.

Обыкновенно различаютъ двѣ методы разысканія рѣшеній математическихъ проблемъ: *анализъ и синтезъ.*

Дюгамель въ «методахъ умозрительныхъ наукъ, подвергая строгой критикѣ различныя опредѣленія анализа и синтеза, останавливается на слѣдующемъ описаніи анализа:

I форма анализа. Методъ для доказательства гипотезъ:

«Когда требуется найти доказательство данному предложенію, то сначала ищется—можетъ ли оно быть выведено, какъ необходимое слѣдствіе изъ принятыхъ предложеній, и, если такъ, то оно само должно быть принято и будетъ, слѣдовательно, доказано. Если нельзя открыть, изъ какихъ извѣстныхъ предложеній оно можетъ быть выведено, то отыскиваютъ, изъ какого непринятаго еще предложенія оно могло бы быть выведено, и тогда вопросъ сводится на доказательство истины послѣдняго предложенія. Если оно можетъ выводиться изъ принятыхъ предложеній, то будетъ признано истиннымъ, слѣдовательно, и предложенное: если же нѣтъ, то нужно искать, изъ какого непринятаго еще предложенія оно могло бы быть выведено, и вопросъ опять приводитъ къ тому, чтобы доказать истину этого послѣдняго. Такимъ образомъ слѣдуетъ продолжать до тѣхъ поръ, пока не будетъ достигнуто предложенія, признаннаго истиннымъ, и тогда истина предложеннаго будетъ доказана.

Отсюда видно, что методъ, названный анализомъ, состоитъ въ установленіи цѣпи предложеній, начинающейся съ того, которое желаютъ доказать и кончающейся извѣстнымъ; цѣпь составляется при этомъ такими предложеніями, изъ которыхъ каждое, начиная съ перваго, должно быть необходимымъ слѣдствіемъ послѣдующаго. Откуда происходитъ, что первое является слѣдствіемъ послѣдняго и поэтому столь же истинно, какъ послѣднее» (§ 5).

Анализъ Дюгамель называетъ *методой приведенія.* Роль гипотезирующаго разума здѣсь состоитъ въ установкѣ слѣдующихъ гипотезъ, требующихъ провѣрки:

1) Предположенія, которое слѣдуетъ доказать. Это *основная гипотеза*, въ которую мы не перестаемъ вѣрить во все время анализированія.

2) Цѣлаго ряда гипотезъ, относящихся къ каждому изъ предложеній, которыя мы хотимъ включить въ цѣпь доказательства, которыя во время процесса анализированія отстраняются одна за другой по причинѣ или ихъ ложности или безполезности для нашей цѣли, т.-е. для нахожденія связи предложенной гипотезы съ извѣстной, вплоть до того момента, когда удастся найти полный рядъ подходящихъ промежуточныхъ положеній.

Отмѣчаемая Дюгамелемъ другая форма анализа, названная «аналитической методой рѣшенія проблемъ», состоитъ въ сведеніи предложенной къ рѣшенію проблемы къ другой, такъ что при рѣшеніи ея первая будетъ рѣшена, этой другой къ третьей и т. д., пока не достигнемъ такой, рѣшеніе которой извѣстно (§ 28); всѣ въ концѣ-концовъ переходятъ въ первую. Для того, чтобы судить о томъ, что та проблема, къ которой сводится данная проще нея, надо имѣть хоть какое-либо представленіе о томъ, какъ она можетъ быть рѣшена т.-е. необходима гипотеза, къ ней относящаяся, необходимо имѣть доказательства хотя бы спорныя для нѣкоторыхъ положеній.

«Синтезъ, другая метода математическаго изслѣдованія, состоитъ, по Дюгамелю, въ томъ, что изъ предложеній, принятыхъ истинными, выводятся другія, какъ необходимыя слѣдствія, изъ этихъ новыя, и такимъ образомъ далѣе до тѣхъ поръ, пока не достигнемъ даннаго, которое въ этомъ случаѣ само признается истиннымъ» (§ 38). Это, по мнѣнію Дюгамеля, методъ *редуктивный*. Такимъ образомъ и въ синтезѣ устанавливаются гипотезы для провѣрки.

1) *Основная* относительно истинности высказанной теоремы.

2) гипотеза, что данную извѣстную теорему можно взять за исходный пунктъ, и что выводимыя изъ нея другія теоремы идутъ въ надлежащемъ направленіи.

Относительно второй формы синтеза, указываемой Дюгамелемъ, мы можемъ сдѣлать совершенно то же замѣчаніе, какъ о второй формѣ анализа.

Съ какой методы свойственно математическому уму начинать свои изслѣдованія?

Вообразимъ себѣ, что мы перенесены съ завязанными глазами въ какое-либо неизвѣстное намъ мѣсто, гдѣ мы видимъ цѣнныя сокровища, которыя мы желаемъ постепенно перетащить въ свой домъ. Должны ли мы искать тотчасъ дорогу домой или ждать, когда мы опять тѣмъ же образомъ попадемъ домой и начать поиски уже оттуда? Я думаю, что покуда намъ не снимутъ съ глазъ повязки, мы не больше будемъ имѣть надежды перенести къ себѣ эти сокровища, чѣмъ въ томъ случаѣ, если бы мы ихъ видѣли во снѣ. Если мы въ концѣ-концовъ благополучно рѣшаемъ проблемы и къ высказываемымъ нами теоремамъ приставляемъ доказательства, такъ это именно потому, что наши глаза не завязаны непроницаемой повязкой. До того, какъ лучи строгаго и яснаго познанія осѣнятъ нашъ мозгъ, мы все-таки видимъ, хотя видимъ весьма мало и въ густомъ туманѣ. Мы не можемъ сказать, начинаетъ ли мысль съ альфы или съ омеги? Но мы навѣрное знаемъ, что она вначалѣ указываетъ, хотя бы гипотетично, на основаніи самыхъ поверхностныхъ аналогій, что здѣсь альфа, а тамъ омега, что высказанную теорему или заданную проблему можно связать именно съ этимъ даннымъ и уже извѣстнымъ положеніемъ или проблемой. Затѣмъ ощупью мы начинаемъ разыскивать и промежуточныя звенья.

«За синтезомъ,—говоритъ Дюгамель,—важная невыгода, что онъ не указываетъ причину, заставляющую выбирать пунктъ отправленія, такъ и всякое изъ послѣдовательныхъ слѣдствій».

Поэтому можетъ показаться, что мысль, чувствуя себя болѣе колеблющейся при гипотезѣ, всегда предполагаетъ начинать съ болѣе вѣрной методы именно съ анализа. Но то же обвиненіе ложится и на анализъ.

Откуда мы можемъ знать, что то положеніе, къ которому приводится данное, ведетъ насъ ближе къ цѣли? Вѣрно, что въ синтезѣ гипотетична точка исхода, но нѣтъ сомнѣнія, что въ этомъ случаѣ направленіе самаго движенія болѣе опредѣляется чѣмъ въ анализѣ. Вѣдь мы здѣсь находимся въ томъ же положеніи, какъ въ томъ случаѣ, когда соединяемъ двѣ точки линіей. Въ анализѣ же такая точка только одна, это то положеніе, къ которому подыскиваемъ доказательство, и направленіе линіи здѣсь находится еще въ большей неопредѣленности, чѣмъ въ первомъ случаѣ.

Намъ представляется совершенно ошибочнымъ мнѣніе Дюгамеля, по которому «синтетическій методъ совершенно неприложимъ для открытія способа рѣшенія предложенныхъ проблемъ, что имъ можно открывать только случайныя проблемы». Если бы это было такъ, то такой методъ не имѣлъ бы никакой цѣны, какъ методъ изслѣдованія, за нимъ оставалось бы значеніе только методы изложенія и, притомъ методы крайне искусственной. Вѣдь, какъ мы выше замѣтили, случайныхъ проблемъ, не находящихся въ связи съ цѣлымъ, наука не признаетъ; мы не должны предаваться въ наукѣ свободному теченію представленій. Изъ данной теоремы можно выводить безконечную массу слѣдствій, но врядъ ли это можно признать за научное мышленіе.

На такой точкѣ зрѣнія относительно синтеза стоитъ Поръ-рояльская логика, считающая анализъ за методъ разрѣшенія, а синтезъ за методъ составленія или методъ доктрины.

Совершенно справедливо говоритъ Арно (Дюгамель), что доказывать происхожденіе даннаго лица отъ Людовика Святого можно двояко, указывая его отца, дѣда и т. д. вплоть до Людовика (анализъ), или, начиная съ Людовика, переходить къ его дѣтямъ, внукамъ и т. д. вплоть до даннаго лица (синтезъ). Мы прибавимъ, что такимъ образомъ не только доказываютъ, что данное лицо потомокъ Людовика Святого, но и разыскиваютъ генеалогію даннаго лица. Для доказательства происхожденія даннаго лица отъ Людовика, причемъ, конечно, до начала разысканія должно быть какое либо основаніе подозрѣвать это высокое происхожденіе, не идутъ только въ одномъ направленіи отъ даннаго лица къ его предкамъ, но стараются подробнѣе изучить и генеалогію Людовика и именно въ томъ направленіи, въ которомъ могутъ встрѣтить какіе-либо намеки на возможность происхожденія фамиліи даннаго лица отъ потомковъ Людовика. Вѣрнѣе всего, что мысль поступаетъ аналогично тому, какъ мы поступаемъ, желая продѣть нитку въ иголку, мы двигаемъ какъ ниткой, такъ и иголкой. Движеніе идетъ съ обоихъ концовъ, мы поперемѣнно и приводимъ и редуцируемъ.

Изъ извѣстнаго положенія, представляющагося намъ подходящимъ, мы выводимъ слѣдствія, обѣщающія привести насъ къ цѣли, неизвѣстное или недоказанное приводимъ къ другимъ тоже недоказаннымъ и такъ продолжаемъ, пока оба наши движенія не столкнутся на одномъ общемъ положеніи и не обратятся въ непрерывное теченіе.

§ 3. Сводятся ли математическія способности къ трудолюбію, соединенному съ хорошей памятью?

Успѣхъ болѣе или менѣе быстрый при разысканіи рѣшенія задачи зависитъ отъ *числа неудачныхъ попытокъ и отъ большей или меньшей скорости отдѣльныхъ провѣрокъ*. Какъ то, такъ и другое находится въ зависимости отъ *памяти* и содержанія послѣдней, т.-е. въ зависимости отъ болѣе или менѣе сильныхъ воспроизводительныхъ способностей.

Отсюда слѣдуетъ, что *хорошая математическая способность предполагаетъ сильную память* и причемъ главнымъ образомъ на предметъ того типа, съ которымъ имѣетъ дѣло математика. Слѣдуетъ замѣтить, что очень полное содержаніе памяти можетъ до извѣстной степени компенсировать слабость послѣдней. Если много знающему трудно вспомнить какую-либо опредѣленную методу, то въ его распоряженіи остается цѣлый выборъ другихъ методъ, изъ которыхъ, хотя бы одна придетъ ему на умъ, и въ этомъ случаѣ можетъ столько же выиграть какъ сильная, но бѣдная память, принужденная оставаться при одной въ ней содержащейся методѣ.

Такимъ образомъ на первый взглядъ можетъ показаться, что познаніе можетъ вполнѣ замѣнить способности или же, что послѣднія, поскольку онѣ касаются математики сводятся только къ большему или меньшему интересу къ наукѣ, соединенному съ трудолюбіемъ. Къ такому мнѣнію приходитъ Шопенгауэръ[1]). Доказывая рядомъ фактовъ и подтверждая своими метафизическими соображеніями наслѣдованіе отъ матери интеллектуальныхъ свойствъ, а отъ отца характера, онъ отмѣчаетъ поразительный фактъ, по его мнѣнію, только видимо противорѣчущій его теоріи.

Оказывается, что въ то время, какъ біографія поэтовъ и философовъ на сторонѣ Шопенгауэра, математики и представители ближайшихъ къ ней наукъ даютъ факты другого рода, якобы говорящіе за наслѣдованіе ума отъ отца. Существуютъ цѣлыя семьи Бернулли, Кассини, Гершелей, Струве, въ которыхъ математическія способности идутъ по мужской, а не по женской линіи.

---

1) *Шопенгауэръ*. Міръ, какъ Воля и Представленіе, т. II, гл. XLIII.

Шопенгауэръ даетъ этому объясненіе въ томъ, что «математика требуетъ прежде всего прилежанія и настойчивости». Это-то и наслѣдуется вмѣстѣ съ характеромъ отъ отца, а что сверхъ этого, это столь ничтожно, что для этого особаго наслѣдованія не требуется.

Противъ такого взгляда говорятъ тѣ факты, что существуютъ лица, обладающія достаточнымъ прилежаніемъ и тѣмъ не менѣе съ трудомъ усвояющія математическія истины. Если объяснять это недостаткомъ памяти и сводить способность къ тому и другому роду мышленія къ памяти, то слѣдуетъ признать, какъ мы будемъ еще ниже имѣть случай говорить, особую специфическую память математика, такъ какъ лица, неспособныя къ математикѣ могутъ обладать прекрасной памятью на событія своей жизни или на музыкальные мотивы. Откладывая пока анализъ математической памяти, мы постараемся теперь указать другія характеристическія черты математическаго мышленія.

Большая быстрота одного ума въ сравненіи съ другими въ разысканіи рѣшеній при одинаковой эрудиціи и опытности въ математическихъ изысканіяхъ указываетъ на то, что не одна только память является необходимымъ условіемъ математической способности, что необходимо присутствіе еще другихъ специфическихъ, психологическихъ элементовъ. Въ то время, какъ сильный математическій умъ мало отклоняется отъ прямого пути, ведущаго къ цѣли, дѣлаетъ мало неудачныхъ попытокъ и въ ложности каждой изъ нихъ быстро и легко убѣждается, умъ болѣе слабый долго блуждаетъ среди тщетныхъ попытокъ и детальныхъ провѣрокъ, сдѣланныхъ предположеній.

§ 4. Необходимость для объясненія математическаго мышленія введенія въ разсмотрѣніе безсознательнаго мыслительнаго процесса.

Отчего въ то время, какъ одному уму почти сразу является прямое рѣшеніе, другой долженъ долго блуждать раньше, чѣмъ прійти къ желанной цѣли? Въ чемъ состоитъ волшебное свойство тѣхъ людей, которые какъ говоритъ—Кантъ [1])—«какъ бы съ волшебнымъ жезломъ въ рукахъ умѣютъ отыскивать сокровища познанія, хотя бы они никогда этому не учились. И этому

---

[1]) *Кантъ*. Антропологія § 54.

они не могутъ научить и другихъ, но только могутъ идти впереди нихъ: это уже даръ природы».

Мы думаемъ, что на этотъ вопросъ рефлексія намъ вполнѣ не можетъ отвѣтить. Поскольку мы анализируемъ сознательную мысль, мы въ ней находимъ только большее или меньшее число гипотезъ и ихъ вполнѣ сознательныхъ провѣрокъ. Въ сильномъ и быстромъ умѣ эти гипотезы создаются и гибнутъ съ большой быстротой. Едва успѣваетъ такая гипотеза родиться, какъ умъ наноситъ ей смертельный ударъ. Откуда появляются эти враги, борьба которыхъ проэктируется на экранѣ сознанія? Если мы вспомнимъ, что многія психическія явленія находятъ свою разгадку въ безсознательной психической дѣятельности, что нашъ умъ способенъ, какъ кротъ подъ землей, производить не менѣе кропотливую и сложную работу въ потемкахъ подъ-сознанія, чѣмъ при свѣтѣ сознанія, то мы будемъ въ состояніи дать слѣдующее указаніе, гдѣ искать разгадку.

До того, какъ въ работающую сознательную мысль приходитъ какое-либо предположеніе, въ безсознательной мысли, всегда работающей параллельно сознанію, гибнетъ масса другихъ предположеній; только наиболѣе обѣщающія, выступаютъ за порогъ сознанія. Въ то время, какъ въ слабомъ и медленномъ умѣ вся работа вчернѣ совершается въ сознаніи въ сильномъ и быстромъ, въ мірѣ сознанія все является въ почти готовомъ видѣ. Чудесный волшебный жезлъ слѣдуетъ искать въ безсознательномъ мыслительномъ процессѣ.

§ 5. Роль безсознательнаго мыслительнаго процесса при повѣркѣ предварительныхъ гипотезъ.

Провѣрка сдѣланнаго предположенія обыкновенно бываетъ *не полной*. Принятая гипотеза отвергается, если имѣется хоть одинъ аргументъ противъ нея; но этотъ аргументъ въ большинствѣ случаевъ бываетъ столь же неточнаго характера, какъ аргументъ въ пользу этой гипотезы.

Такъ сдѣланная гипотеза объ интегрируемости въ конечномъ видѣ эллиптическаго интеграла послѣ большого числа попытокъ найти для него выраженіе отвергается, какъ ложная и уже не возбуждаетъ интереса математиковъ, доказательство же интегрируемости дается много позже. То же относится и къ рѣшенію въ радикалахъ буквеннаго уравненія пятой степени. Здѣсь противъ сдѣланнаго предположенія говоритъ только шаткій аргументъ, состоящій въ томъ, что масса опытныхъ и, болѣе того, геніальныхъ математиковъ произвели рядъ тщетныхъ попытокъ его рѣшенія, къ которымъ присоединились, можетъ быть, еще менѣе успѣшныя попытки съ нашей стороны. Впрочемъ, гипотеза можетъ быть отвергнута не только какъ ложная, а и какъ безполезная въ томъ случаѣ, когда провѣрка ея требуетъ рѣшенія проблемъ, завѣдомо очень трудныхъ, которыя мы никакъ не разсчитываемъ рѣшить.

Если мы говоримъ, что только *наиболѣе обѣщающія* гипотезы всплываютъ въ сознаніи, то намъ незачѣмъ предполагать, что безсознательное мышленіе произвело ихъ детальную и точную провѣрку, достаточно, чтобы на основаніи неточныхъ заключеній по аналогіи оно остановилось на этихъ гипотезахъ.

Высказывая такое объясненіе, мы находимъ необходимымъ изложить нашъ взглядъ на свойства безсознательной мысли, можетъ быть, нѣсколько идущій въ разрѣзъ съ общепринятыми.

§ 6. Ошибается ли безсознательная мысль?

Характерное отличіе сознательныхъ и безсознательныхъ актовъ состоитъ въ меньшей погрѣшности послѣднихъ. Всѣ безсознательныя дѣйствія отличаются особой правильностью и первый лучъ пробудившагося сознанія часто является подобнымъ тормозящему стержню, попавшему между спицъ быстро и правильно вертящагося колеса. Шитье, игра на рояли и многія другія дѣяствія идутъ тогда наиболѣе успѣшно, когда тѣ элементы, на которые они разлагаются, находятся на порогѣ сознанія или спускаются еще ниже, т.-е. представляютъ такъ называемыя Лейбницевы перцепціи.

Мы охотно признаемъ только *меньшую погрѣшность* безсознательныхъ актовъ, въ частности безсознательнаго мышленія, но мы будемъ оспаривать положеніе Гартмана *о безусловной безошибочности* безсознательныхъ психическихъ актовъ.

Наоборотъ вездѣ, гдѣ стараемся дополнить сознательный процессъ безсознательнымъ, въ послѣднемъ мы предполагаемъ свойства, присущія первому.

Внезапное появленіе въ сознаніи готоваго рѣшенія какой-либо задачи, которую мы не могли долго рѣшить, мы объясняемъ безсознательнымъ мышленіемъ, которое въ то время, какъ сознаніе было занято посторонними вещами, продолжало заниматься задачей. Здѣсь возможны двѣ гипотезы: или безсознательная мысль является, какъ «deus ex machina», «не колеблется и не сомнѣвается, но мгновенно обнимаетъ въ одинъ и тотъ же моментъ и результатъ и производящій его цѣлый мыслительный процессъ, мыслитъ всѣ члены процесса заразъ» (Гартманъ), или же эта мысль продолжаетъ совершать ту же кропотливую работу, что сознательная мысль, переходя черезъ рядъ сомнѣній и ошибокъ къ истинѣ, per aspera ad astra. При первомъ предположеніи, стадія, въ которой получается вѣрный результатъ, должна сейчасъ же слѣдовать за моментомъ, когда обсужденіе задачи перешло изъ сознанія въ область безсознательнаго, процессъ безсознательнаго мышленія затѣмъ обрывается и черезъ нѣкоторое время задача опять воскресаетъ въ сознаніи: въ психической жизни такимъ образомъ предполагается сомнительный разрывъ.

Гораздо вѣроятнѣе второе предположеніе, при которомъ весь процессъ предполагается непрерывно заполняющимъ все время, когда сознаніе не занято обсужденіемъ задачи вплоть до результата, который всплываетъ за порогъ сознанія.

Такимъ образомъ по нашему мнѣнію безсознательное мышленіе такимъ же образомъ ошибается (хотя и въ меньшей степени), какъ сознательная мысль.

Большая быстрота и легкость безсознательной мысли зависитъ еще отъ слѣдующихъ причинъ.

Въ то время, какъ въ сознаніи можетъ быть въ данный моментъ только одна мысль, безсознательная мысль можетъ сразу совершать по нѣскольку работъ. Возможно въ одно время слушать чтеніе и шить.

На этомъ основаніи можно предположить, что въ напряженной мысли съ главнымъ, такъ сказать, центромъ притяженія, съ главной системой движущихся психическихъ элементовъ, представляющихъ сознаніе, образуются еще частные центры притяженія, частныя системы. Между различными системами устанавливается сообщеніе только въ критическихъ случаяхъ.

§ 7. Различныя роли безсознательной мысли въ мышленіи математика и философа.

Если мы отъ математическаго мышленія перейдемъ къ философскому, которое, какъ математикъ, мыслитъ отвлеченно, причемъ въ иныхъ случаяхъ пользуется, какъ математикъ, дедукціей, то легко увидимъ разницу въ конструкціи ихъ мыслительныхъ способностей, именно въ томъ значеніи, которое имѣетъ для мыслителей этихъ двухъ типовъ *подсознательная работа мысли.*

Въ то время, какъ математикъ *доказываетъ*, философъ только *убѣждаетъ.* Какъ тотъ, такъ и другой начинаютъ съ гипотезы; но второй большей частью и кончаетъ гипотезой.

Какъ тотъ, такъ и другой творческимъ воображеніемъ создаютъ нѣсколько предположеній, изъ которыхъ и производятъ выборъ черезъ провѣрку каждаго. Въ математикѣ провѣрка можетъ быть признана вполнѣ выполненной лишь тогда, когда къ провѣряемымъ предположеніямъ можетъ быть приставлено строгое доказательство. Въ философіи же порою эта провѣрка сводится лишь къ *невозможности увидѣть какія-либо противорѣчія, содержащіяся во взятомъ предположеніи* и къ способности этого предположенія служить объясненіемъ возможно широкаго круга явленій.

Такимъ образомъ философскій умъ въ силу своей меньшей точности, чѣмъ умъ математическій, скорѣе и легче приходитъ къ цѣли въ этомъ закулисномъ выборѣ сперва только воображаемыхъ, а затѣмъ или строго доказуемыхъ или подтверждаемыхъ рядомъ аргументовъ предположеній. Но, кромѣ меньшей точности философскаго ума, этотъ фактъ обусловливается еще другой причиной. Даже самый широкій творческій умъ не въ состояніи создать столько философскихъ объясненій, сколько можетъ придти даже посредственному математическому уму различныхъ предположеній, относящихся къ рѣшенію какой-либо задачи. Въ то время, какъ мысли въ головѣ математика вспыхиваютъ и тухнутъ, пока не зажжется, наконецъ, послѣдняя и единственно истинная, философъ зажигаетъ и тушитъ одну иллюминацію за другой. Но можно навѣрно сказать, что такихъ иллюминацій бываетъ обыкновенно немного. Философъ это полу-поэтъ, полу-ученый; начинаетъ онъ мыслить, какъ поэтъ; каждая его мысль при первомъ появленіе это фантазія поэта, и только затѣмъ она идетъ на судъ философа-ученаго.

Мышленіе философа представляетъ мышленіе меньшаго напряженія, чѣмъ мышленіе математика, поскольку оно касается не первой своей стадіи, именно, построенія философской гипотезы, а второй—провѣрки ея или отысканія ряда подтверждающихъ ее аргументовъ.

Вполнѣ естественно предполагать, что въ *мышленіи философа работа мысли идетъ только въ сферѣ сознанія, мало распространяясь въ подсознательныя области. Мышленіе математика, наоборотъ, глубоко внѣдряется въ безсознательную сферу, то всплывая на ея поверхность, то погружаясь въ глубину.*

Математикъ не сознаетъ каждаго шага своей мысли, какъ виртуозъ движенія смычка.

Извѣстны случаи, когда въ состояніи эпилептическихъ припадковъ продолжали играть на рояли или случаи, когда трудно разыскиваемое рѣшеніе геометрической задачи всплывало съ утреннимъ пробужденіемъ отъ сна, въ продолженіе котораго неусыпная безсознательная мысль продолжала работать; но намъ неизвѣстны философскія теоріи, созданныя въ эпилепсіи или во снѣ.

§ 8. Разница между склонностью и способностью ума.

При анализѣ математической способности слѣдуетъ рѣзко отличать *склонность* къ извѣстному роду занятій отъ *способностей*. Мы думаемъ, что всякая, стоящая выше нормы, способность соединена съ нѣкоторой склонностью, избытокъ силы всегда стремится проявиться. Человѣкъ съ сильными мускулами почти всегда имѣетъ любовь къ физическимъ упражненіямъ. Если сила не разряжается въ серьезномъ дѣлѣ, онъ находитъ себѣ выходъ въ игрѣ. Но мы не можемъ сказать обратнаго. Если человѣкъ выказываетъ къ чему - либо особенную склонность, то эта склонность не является показателемъ особенной, выше нормы стоящей способности. Въ иныхъ случаяхъ она указываетъ лишь на относительное превосходство одной способности надъ другой. Человѣкъ мыслитъ не всегда по доброй охотѣ, а часто лишь по принужденію неумолимыхъ обстоятельствъ и въ такомъ случаѣ вполнѣ естественно, что умъ выбираетъ для своей цѣли легчайшій путь, т.-е. тотъ путь, къ которому у него болѣе всего способностей. Но все - таки нельзя утверждать, что такъ именно всегда бываетъ. Характеръ человѣка кладетъ свой отпечатокъ не только на чувства и желанія, вліяніе его распространяется даже на манеру мыслить.

Болѣе или менѣе подвижной характеръ долженъ сказаться въ тѣхъ или другихъ склонностяхъ, даже самаго отвлеченнаго ума.

Ипохондрикъ, живущій болѣе своимъ внутреннимъ міромъ, чѣмъ окружающимъ, будетъ имѣть умъ, болѣе склонный къ самоанализу, чѣмъ къ наблюденію окружающей его природы; для него мышленіе отвлеченными понятіями будетъ болѣе подходящей сферой, чѣмъ индукція естественныхъ наукъ. Сколько людей рождается съ характеромъ и склонностями ученаго, но съ умомъ, едва достигающимъ будничной нормы.

Собственно говоря большинство классификацій относится къ склонностямъ, а не къ способностямъ ума.

Выраженія: *остроумный, глубокій, тупой, поверхностный и т. д.* опредѣляютъ способности ума, умъ *индуктивный и дедуктивный*, какъ мы постараемся доказать, опредѣляютъ склонности.

Подъ какой изъ общеизвѣстныхъ типовъ подвести математическій умъ?

§ 9. Остроуміе, какъ одно изъ характерныхъ свойствъ математической способности.

Одна изъ трудностей при отвѣтѣ на этотъ вопросъ, это сравнительная неясность общепринятыхъ терминовъ для свойствъ, характеризующихъ эти типы. Кантъ [1]) опредѣляетъ слѣдующимъ образомъ—*остроуміе* «способность къ общему правилу подыскивать частное есть способность сужденія, способность для частнаго подыскивать общее есть остроуміе». Съ такимъ опредѣленіемъ, сводящимъ остроуміемъ на способность къ индукціи, мы едва ли можемъ согласиться.

Острый умъ можетъ, какъ мѣткая стрѣла, идя издалека, попадать въ цѣль. Острякомъ называютъ человѣка, способнаго находить общія черты въ видимо совершенно разнородныхъ предметахъ; конечно, ему должна принадлежать способность идти отъ частнаго къ общему, но центръ тяжести его остроумія ле-

[1]) *Кантъ.* Антропологія I. § 42.

житъ не въ этомъ, а въ *способности обнимать умомъ заразъ два совершенно разнородныхъ предмета*. Такимъ образомъ *остроуміе это способность обнимать въ одномъ сужденіи понятія изъ двухъ малосвязанныхъ областей мысли*. Психологическій анализъ математическаго мышленія показываетъ, что *математикамъ главнымъ образомъ присуще остроуміе*. Въ предварительной работѣ надъ созданіемъ и провѣркой дѣлаемыхъ гипотезъ мысль математика должна перелетать къ различнымъ ему извѣстнымъ уже положеніямъ и методамъ, отыскивая въ нихъ признаки по своей аналогіи съ тѣми, которые онъ находитъ въ поставленной проблемѣ, дающіе надежды на удачу. Отчаявшись найти помощь вблизи, ему приходится обращаться за ней въ самыя отдаленныя области въ сферѣ его математическаго мышленія, связь которыхъ съ областью настоящаго изслѣдованія можетъ быть открывается впервые. Математикъ долженъ быть остроумнымъ, и лучшей школой остроумія является математика.

V

§ 10. Быстрота математическаго мышленія.

Другое характерное свойство математическаго ума это его *быстрота*. Если читатель вспомнитъ нашъ взглядъ на механизмъ математическаго мышленія, то онъ легко увидитъ что это свойство обусловливается той работой, которую совершаетъ безсознательное мышленіе въ помощь сознательному. Безспорно, что изъ всѣхъ ученыхъ наиболѣе быстро мыслятъ математики, но безспорно также и то, что этотъ классъ мыслителей-теоретиковъ значительно уступаетъ въ быстротѣ многимъ мыслителямъ-практикамъ, финансистамъ, политикамъ и полководцамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, послѣдніе гораздо болѣе связаны временемъ; они должны придти къ окончательному результату не позже опредѣленнаго дня и часа. Такого опредѣленнаго ограниченія времени для математика нѣтъ; онъ долженъ только недолго останавливаться на каждой гипотезѣ, такъ какъ иначе, вслѣдствіе огромнаго ихъ числа, онъ слишкомъ долго не могъ бы дойти до результата.

Это свойство, обусловливаемое, какъ мы выше уже замѣтили, значительной ролью безсознательнаго мышленія, не особенно выдѣляется въ томъ случаѣ, когда умъ, не представляя чистый типъ математическаго ума, приближается своимъ характеромъ къ философскому. Подобно тому, какъ всякое движеніе совершается быстро и безъ колебаній, если это движеніе автоматическое, безъ вмѣшательства сознанія, точно такъ же и мышленіе поскольку оно принимаетъ во всѣхъ своихъ стадіяхъ характеръ сознательнаго философскаго размышленія, проигрываетъ въ быстротѣ.

§ 11. Философъ и математикъ.

Но есть одно свойство ума, которымъ вознаграждается менѣе быстрый въ сравненіи съ умомъ математическимъ умъ философскій.

Такова *широта* ума, если подъ послѣдней разумѣть *способность ума познавать въ видѣ связнаго цѣлаго широкія области.*

Въ то время какъ въ быстромъ умѣ главную роль играетъ безсознательный моментъ, въ широкомъ умѣ главнымъ двигателемъ является ясное недремлющее сознаніе.

Замѣтимъ кстати, что остроуміе болѣе присуще философскому уму, чѣмъ быстрота мысли. Смѣлые и удачные скачки принадлежать иногда и философскимъ умамъ. Но все-таки остроуміе принадлежитъ преимущественно къ характернымъ свойствамъ математическаго ума. Если философъ широкъ, въ то время, какъ математикъ быстръ, то вмѣстѣ съ тѣмъ философъ *глубокъ,* въ то время какъ математикъ *остроуменъ.*

Мы уже выше сказали, что въ то время, какъ въ математикѣ главная трудность въ *доказательствѣ,* въ оправданіи сдѣланныхъ предположеній, въ философіи не оправданіе, а главнымъ образомъ *построеніе этихъ предположеній* составляетъ затрудненіе. Затрудненіе это и устраняетъ *глубокомысліе—способность дѣлать впередъ къ намѣченной цѣли большіе шаги.* При этомъ не столько важна строгость и простота доказательства, главную роль играетъ именно разысканіе послѣдовательнаго ряда проблемъ, прямо, не отклоняясь ни въ одну сторону, ведущаго въ самыя нѣдра изслѣдуемой области.

§ 12. Шахматистъ и математикъ.

Обнаруженныя нашимъ анализомъ характерныя свойства математическаго ума, остроуміе и быстрая сообразительность, не даютъ полной его характеристики. Эти свойства присущи тоже въ большой степени шахматисту и другого рода игрокамъ, принужденнымъ мыслить очень быстро въ сферѣ огромнаго числа комбинацій.

Механизмъ мышленія игрока, въ сущности говоря, почти тотъ же, что у математика. Первая стадія—гипотеза, воображаемый ходъ, вторая—провѣрка, т.-е. выводъ нѣкотораго болѣе или менѣе длиннаго ряда послѣдствій изъ него, и въ случаѣ присутствія явно неблагопріятныхъ среди послѣднихъ—отказъ отъ этого хода. Но мы должны здѣсь отмѣтить одно существенное различіе. *Въ то время, какъ математикъ успокаивается окончательно лишь, когда будетъ найденъ весь комплектъ аргументовъ за сдѣланное предложеніе, игрокъ мирится съ ними при болѣе скромномъ требованіи, чтобы не было никакихъ возраженій противъ.*

Конечно, въ этомъ отношеніи математикъ находится въ болѣе затруднительномъ положеніи; ему трудно, такъ сказать, не находя около себя друзей, идти искать ихъ въ болѣе далекія области, въ то время, какъ для игрока важно только убѣдиться, что около него нѣтъ враговъ. Такимъ образомъ *у математика будетъ перевѣсъ въ остроуміи въ то время, какъ у игрока*, по тѣмъ же причинамъ какъ у финансиста, полководца и т. д.—*перевѣсъ въ быстротѣ соображенія.*

§ 13. Поэтъ и математикъ.

Мы уже сказали, что математическое мышленіе начинаетъ съ воображенія. Здѣсь мы должны отмѣтить разницу, которая существуетъ по нашему мнѣнію между понятіями: *воображеніе и фантазія. Воображеніе это дѣятельность, соединяющая въ себѣ какъ воспроизведеніе сознательное или произвольное пережитыхъ, сложныхъ впечатлѣній, такъ и возсозданіе при помощи разложенія и комбинированія составныхъ частей при помощи фантазіи въ новыя еще не пережитыя представленія.*

Такимъ образомъ фантазію мы разсматриваемъ какъ составную часть воображенія, именно воображеніе въ его созидательномъ моментѣ.

Для того, чтобы быть хорошимъ математикомъ, нужно обладать хорошимъ воображеніемъ. Это же требованіе предъявляется и поэту. Вслѣдствіе своего могучаго воображенія математикъ кажется поэтомъ среди другихъ ученыхъ.

Но отсюда слишкомъ далеко до того, чтобы выводить, что поэтическое творчество родственно математическому.

«Я понимаю—пишетъ Шабельской Софья Ковалевская,—что васъ такъ удивляетъ, что я могу заниматься заразъ и литературой и математикой. Многіе, которымъ никогда не представлялось случая болѣе узнать математику, смѣшиваютъ ее съ ариѳметикой и считаютъ наукой сухой. Въ сущности же эта наука, *требующая наиболѣе фантазіи*, и одинъ изъ первыхъ математиковъ нашего столѣтія говоритъ: совершенно вѣрно, что *нельзя быть математикомъ, не будучи поэтомъ въ душѣ*. Только, разумѣется, чтобы понять вѣрность этого опредѣленія, надо отказаться отъ стараго предразсудка, что поэтъ долженъ что-то сочинять не существующее, что фантазія и вымыселъ это одно и то же. Мнѣ кажется, что поэтъ долженъ только видѣть, чего не видятъ другіе, видѣть глубже другихъ. И это же долженъ математикъ».

Мы съ своей стороны не считаемъ нужнымъ выступать защитникомъ математики отъ обвиненія ея въ сухости. Мы считаемъ, что *хорошій математикъ въ то время, когда онъ мыслитъ, какъ математикъ, никогда не бываетъ поэтомъ*. Мы скорѣй склонны думать, что математическому воображенію присущъ совершенно специфическій характеръ: существуетъ огромная разница между воображеніемъ математика и поэта. Здѣсь нѣтъ ошибки, порожденной предразсудкомъ, о которой говоритъ С. Ковалевская.

Къ тому же еще слѣдуетъ замѣтить, что фантазія и вымыселъ это не одно и то же—съ этимъ легко согласиться, но что фантазія поэта должна быть безъ вымысла, что поэтъ долженъ видѣть одну реальность, обратившись изъ художника въ фотографа, это положеніе весьма спорно и во всякомъ случаѣ совершенно не согласуется съ фактическими данными психологіи творчества поэтовъ.

Воображеніе математика и воображеніе поэта принадлежатъ къ двумъ различнымъ типамъ воображенія, отмѣченнымъ Вундтомъ [1]).

«Индивидуальное воображеніе,—говоритъ Вундтъ,—можетъ отличаться или способностью къ чрезвычайно живымъ и яркимъ

[1]) „Физіологическая Психологія", т. II, гл. XVIII.

представленіямъ или же способностью къ весьма разнородному комбинированію представленій: первую форму фантазіи можно назвать *воспріемлющею*, вторую *комбинирующею*. Рѣдко вообще бываетъ она развита въ обоихъ этихъ направленіяхъ. Чѣмъ значительнѣе чувственныя силы представляющаго воображенія, тѣмъ труднѣе для апперцепціи быстро переходить отъ одного представленія къ другому.

Математикамъ, спекулятивнымъ философамъ и изобрѣтателямъ присуща, по Вундту, комбинирующая фантазія. Естествоиспытатели преимущественно обладаютъ воспріемлющей фантазіей. Этого послѣдняго типа фантазіей вооружены и поэты. Классификація Вундта будетъ полнѣй, если типъ воспріемлющей фантазіи распредѣлимъ на два подтипа, но, смотря по тому, относится ли она *къ чувствамъ* или *ощущеніямъ*, въ первомъ случаѣ она можетъ быть названа *субъективной*, во второмъ случаѣ *объективной*. Конечно, фантазія поэта должна быть отнесена къ первому изъ этихъ подтиповъ.

Вундтъ изъ математиковъ выдѣляетъ геометровъ, которымъ приписываетъ вмѣсто комбинирующей воспріемлющую фантазію, которая должна быть, конечно, объективнаго характера.

Въ мнѣніи Вундта, какъ намъ кажется, правильно только то, что *геометръ отличается отъ алгебриста большимъ развитіемъ воспріемлющей фантазіи*. Въ этомъ смыслѣ геометръ ближе къ поэту, чѣмъ алгебристъ. Можно сказать, что въ синтетической геометріи древнихъ болѣе поэзіи, чѣмъ въ современной аналитической. Всѣ эти отличія создаютъ совершенно различные облики умамъ поэта и математика, ставятъ ихъ въ видѣ двухъ различныхъ полюсовъ на сферѣ человѣческаго мышленія.

Математикамъ часто доставляетъ удовольствіе, когда сравниваютъ ихъ науку съ поэзіей, имъ представляется, что подобное сравненіе служитъ только похвалой для ихъ любимаго занятія и снимаетъ вѣчно тяготѣющее надъ ними обвиненіе въ сухости. Между тѣмъ сходство только въ томъ, что, какъ въ поэзіи, такъ и въ математикѣ необходима мощная сила воображенія, и быстрое и энергичное теченіе въ первомъ случаѣ образовъ, во второмъ отвлеченныхъ мыслей заставляетъ мыслителя позабыть объ окружающемъ, улетѣть въ надзвѣздныя сферы. Фактическія данныя отнюдь не говорятъ за какое-либо интимное родство математики и поэзіи. Наоборотъ, среди математиковъ слишкомъ мало находится любителей поэзіи. А среди поэтовъ, можно сказать не гиперболируя, любителей математики совсѣмъ нѣтъ. Достаточно вспомнить Гёте, Надсона и т. д.

§ 14. Активное и пассивное воображеніе.

Такимъ образомъ не только поэту и математику не присуще одно и то же воображеніе, одна и та же фантазія, но различнаго рода математики, геометры и алгебристы отличаются между собой характеромъ своего воображенія.

«Слѣдуетъ замѣтить, говоритъ Рибо [1]), что не существуетъ вообще научнаго воображенія, что форма его должна мѣняться сообразно природѣ наукъ и что, слѣдовательно, она разлагается на нѣкоторое число родовъ или даже видовъ. Отсюда слѣдуетъ необходимость монографій, изъ которыхъ каждая принадлежала бы лицу компетентному».

Никто не сомнѣвается, что математикамъ присущъ особый родъ воображенія, но это еще слишкомъ обще. Ариѳметики, алгебристы и вообще аналисты, у которыхъ открытіе производится въ самой абстрактной формѣ прерывныхъ количественныхъ символовъ и ихъ взаимоотношеній, не могутъ воображать, какъ геометръ.

Можно ли думать, что творецъ начертательной геометріи Монжъ, который освободилъ своимъ трудомъ строителей, архитекторовъ, механиковъ отъ ихъ рутинныхъ правилъ, могъ имѣть то же воображеніе, какъ математикъ, посвящающій себя теоріи чиселъ.

Мы выше видѣли, что особыя окраски воображенія зависятъ отъ того, какая изъ фантазій, воспріемлющая или комбинирующая, преобладаетъ въ нихъ.

Мы укажемъ сейчасъ еще другой пунктъ различія.

Согласно Вундту, у фантазіи существуетъ два рода дѣятельностей, которыя всегда бываютъ между собой перемѣшаны.

Пассивная дѣятельность фантазіи состоитъ въ томъ, что умъ предается игрѣ представленій, не дѣлая въ нихъ сознательнаго выбора.

Активная дѣятельность состоитъ въ томъ, что воля выбираетъ

[1]) Essai sur l'imagination créatrice, ch. IV, p. 199.

извѣстныя представленія изъ конкретныхъ элементовъ, на которые разложилось сложное представленіе и такимъ образомъ соединяетъ эти элементы въ стройное цѣлое.

Характеръ той и другой дѣятельности опредѣляется тѣмъ, въ какомъ направленіи можетъ возбуждаться теченіе представленій въ первомъ случаѣ при *пассивномъ состояніи* души, а во второмъ—при *активномъ*.

Иначе говоря, пассивная дѣятельность воображенія опредѣляется главнымъ образомъ характеромъ *ассоціацій*, активная свойствами *памяти*. Фантазія представляется функціей, именно этихъ двухъ перемѣнныхъ. Комбинаціямъ различныхъ родовъ этихъ способностей отвѣчаютъ различные типы воображенія.

Мы имѣемъ теперь возможность отмѣтить еще другое отличіе между воображеніемъ научнымъ, въ частномъ случаѣ математическимъ и воображеніемъ поэта. Это отличіе состоитъ, между прочимъ, и *въ большемъ преобладаніи у поэта пассивной, а ученаго активной дѣятельности воображенія*.

Конечно, ученый также начинаетъ съ пассивной дѣятельности; первымъ толчкомъ бываетъ ассоціація (напримѣръ, при открытіи закона всеміднаго тяготѣнія—падающее яблоко), но воля раньше вступаетъ въ свои права, и теченіе мыслей болѣе въ ея власти, чѣмъ это бываетъ у поэта, къ которому поэтическіе образы слетаются часто безъ всякихъ усилій съ его стороны.

§ 15. Роль пассивнаго воображенія въ математическомъ мышленіи.

Весьма интересно изслѣдовать участіе безсознательной мысли въ пассивной дѣятельности воображенія.

Ассоціація идей распространяется не только на сознательную область, она можетъ вызывать образы и представленія, стоящіе ниже сознанія.

Такое утвержденіе можетъ показаться необычайно парадоксальнымъ.

Мы предполагаемъ всѣ области, сознательную и безсознательную, связанными между собой, такъ сказать, потенціально. Ощущеній, находящіяся въ сознаніи, вообще не вызываютъ тѣхъ ощущеній, которыя составляютъ предметъ безсознательнаго мышленія, но при нѣкоторыхъ особенныхъ состояніяхъ мозга порогъ сознанія можетъ значительно понизиться, безсознательныя ощущенія могутъ тогда дойти до той степени интенсивности, при которой они должны быть сознаны. Въ этотъ моментъ потенціальная связь переходитъ въ актуальную, и эти ощущенія могутъ войти въ ассоціативную цѣпь и быть вызваны сознательными ощущеніями такъ, какъ если бы эти ощущенія сами были когда-либо сознательными.

Только такимъ именно образомъ объясняется фактъ, что въ процессъ сознательнаго мышленія могутъ проникнуть результаты безсознательной мыслительной дѣятельности.

Эти результаты находились у самаго порога сознанія, который постоянно находится въ состояніи колебанія, то понижаясь, то повышаясь. Въ томъ случаѣ, когда порогъ сознанія настолько понизился, что результатъ этотъ поднялся надъ порогомъ сознанія, то можетъ всегда случиться, что какая-либо сознательная мысль, имѣющая какое-либо сходство съ этимъ результатомъ вызоветъ его въ сознаніе по ассоціаціи.

Отсюда мы видимъ, сколь важную роль играетъ пассивная дѣятельность воображенія въ математическомъ мышленіи.

Мысля, мы то натягиваемъ, то распускаемъ вожжи, то наша мысль направляется актомъ воли по опредѣленному направленію, то она пассивно отдается свободному теченію мыслей.

Моментъ соприкосновенія сознанія съ безсознательной мыслительной дѣятельностью, это, въ сущности говоря, вторая фаза процесса творенія по схемѣ Рибо, которая состоитъ въ слѣдующемъ:

1 фаза. Приготовленіе (безсознательная дѣятельность).

2 фаза. Появленіе въ умѣ идеи, вдохновеніе, вторженіе (irruption). (Переходный моментъ).

3 фаза. Періодъ построенія и развитія (сознательная дѣятельность).

Болѣе крупныя математическія способности предполагаютъ болѣе связей между сознательной и безсознательной областями. Для этого необходима болѣе энергичная, болѣе интенсивная безсознательная дѣятельность, при которой большое количество результатовъ придвигается къ самому порогу сознанія.

Здѣсь будетъ умѣстно также упомянуть, въ какомъ смыслѣ ассоціація идей можетъ явиться тормозящей причиной для математическаго мышленія. А именно, она заставляетъ мысль, какъ только воля распускаетъ вожжи, возвращаться въ тѣ же дурныя области. Здѣсь замѣчается особый *автоматизмъ* мысли. Мысль отъ отвергнутой новой идеи по ассоціаціи невольно возвращается къ одной изъ старыхъ и, попавъ на нее, затѣмъ автоматически быстро и легко движется по старой дорогѣ, повторяя всѣ тѣ же ошибки. Во избѣжаніе этого, необходимо постоянное вмѣшательство воли, управляемой сознательной памятью.

§ 16. Психологія математическихъ ошибокъ.

Изслѣдованіе конструкціи математическаго мышленія приводитъ насъ естественно къ вопросу о психологическихъ причинахъ математическихъ ошибокъ.

Вопросъ о заблужденіяхъ очень старъ, если заблужденія разсматривать съ логической точки зрѣнія.

Въ этомъ смыслѣ онъ еще разсматривался Аристотелемъ. Первое же психологическое изслѣдованіе можетъ быть отнесено только къ Бекону, которому принадлежитъ извѣстное ученіе объ идолахъ (обманчивыхъ признакахъ истины, иллюзіяхъ). Но ясно, что всѣ классифицированныя Бекономъ заблужденія могутъ касаться только неточнаго мышленія, когда нѣтъ еще рѣчи о доказательствахъ. Всѣ эти заблужденія, если и могутъ имѣть мѣсто при процессѣ подыскиванія предварительныхъ гипотезъ, то во всякомъ случаѣ окончательно фильтруются производимой затѣмъ провѣркой, и вліяніе аффектовъ даже высшихъ интеллектуальныхъ типовъ сводится къ нулю.

Математическія ошибки суть ничто иное, какъ погрѣшности памяти или вниманія.

Чтобы понять это, возьмемъ простѣйшій примѣръ. Проанализируемъ, въ чемъ состоитъ ошибка при вычисленіи, напримѣръ, при сложеніи нѣсколькихъ многозначныхъ чиселъ.

Желая сложить три числа

$$\begin{array}{r} 53890987 \\ 34567848 \\ 55166239 \end{array}$$

мы складываемъ сперва въ умѣ $7+8+9$ и фиксируемъ въ памяти вторую цифру полученнаго числа 24. Затѣмъ складываемъ $8+4+3=15$, прикладываемъ къ нему вторую цифру фиксированнаго перваго числа—2.

Далѣе ходъ мысли слѣдующій: $15+2=17$, единица фиксируется, складываемъ $9+8+2=19$, $19+1=20$ и такъ далѣе.

Когда мы дойдемъ до сложенія седьмого столбца, т.-е. цифръ 3, 4, 5, у насъ въ памяти будутъ слѣдующія цифры; отъ перваго сложенія 2, отъ второго 1, отъ третьяго 2, отъ четвертаго 1, отъ пятаго 2, отъ шестого 1. Безспорно, что при производствѣ дѣйствій, интенсивность нашего вниманія сильно колеблется, а вслѣдствіе этого колеблется и сила, съ которой запоминаются упомянутыя выше числа, и они вспоминаются съ различной степенью легкости. При быстромъ вычисленіи импульсъ воли для вызова въ памяти желаемой цифры ничтожно малъ, участіе воли можно сравнить съ рукой, которая, отклоняетъ на секунду упругій стержень, чтобы этотъ послѣдній самъ собой принялъ первоначальное свое положеніе. Фиксируя цифру 1 при 6-мъ сложеніи, мы на секунду отвлекаемъ вниманіе, чтобы написать цифру 6, когда же мы перестаемъ думать о 6, единица сразу всплываетъ въ нашей памяти.

Такой актъ вполнѣ аналогиченъ слѣдующему: мы смотримъ въ окно, затѣмъ отвлекаемъ наше вниманіе, смотримъ, напримѣръ, на лежащую передъ нами книгу, затѣмъ закрываемъ глаза—передъ нами возстаетъ безъ усилія воли образъ окна. Если теперь при паденіи вниманія цифра 1 недостаточно фиксировалась памятью, она уже не можетъ возстановиться. Тогда въ сознаніе проникаютъ другія цифры, болѣе рѣзкіе отпечатки результатовъ другихъ, только что сдѣланныхъ вычисленій при болѣе интенсивномъ вниманіи. Обыкновенно одна изъ такихъ цифръ, а именно та, которая является первой, т.-е. та, которая рѣзче сохранилась памятью, и принимается за искомую.

Подобнаго же рода ошибка, хотя болѣе рѣдко, можетъ быть при сложеніи цифръ одного столбца безъ перехода къ слѣдующему. По сложеніи 7 съ 8 запоминается число 15, для прочтенія 9 употребляется краткій промежутокъ времени, въ который 15 можетъ забыться.

Помимо этой погрѣшности элементарной памяти, т.-е. памяти, связующей элементарныя звенья мыслительнаго процесса, возможна еще погрѣшность удерживающей памяти. Мы можемъ недостаточно хорошо вспомнить въ краткій промежутокъ времени, употребленный на вычисленіе, тотъ пунктъ таблицы сложенія или умноженія, который намъ необходимъ. Подобная ошибка, невозможная въ спокойномъ состояніи достаточно опытнаго въ вычисленіяхъ ума, не представляется невозможной, когда при быстромъ вычисленіи сознаніе постоянно наполняется различными мыслями. Среди массы незнакомыхъ лицъ можно легко не узнать и хорошо знакомаго, какъ это часто съ нами случается на улицѣ. Въ сущности, все то, что мы сказали объ ошибкѣ въ сложеніи, даетъ полную схему весьма общаго типа математическихъ ошибокъ. Вотъ въ общемъ видѣ эта схема:

Объекту A *приписывается признакъ* a, *означили это положеніе черезъ* (A, a). *Вниманіе отвлекается отъ* A *къ* B, *затѣмъ возвращается къ* A, *при чемъ припоминается* (A, α), *затѣмъ* B *приписывается признакъ* β, *отвлекаются отъ* B *къ* C, *вспоминаютъ* (B, β). *Ошибка состоитъ въ томъ, что вмѣсто* (B, β) *берутъ* (B, α).

Но подъ этотъ типъ вполнѣ подходятъ далеко не всѣ математическія ошибки. Въ отличіе отъ ошибокъ, о которыхъ сейчасъ велась рѣчь и которыя могутъ быть названы *ошибками вычисленія*, ошибки, о которыхъ мы сейчасъ будемъ говорить, могутъ быть названы *ошибками доказательствъ*. Онѣ состоятъ въ томъ, что *посылка* (A, a) *замѣняется другой* (A, β), *гдѣ* β *не приписывалось еще ни одному объекту, но по своему сходству или по смежности, можетъ легко смѣшаться памятью съ* a. Наиболѣе частой и наиболѣе трудно избѣгаемой ошибкой является та, при которой β *представляетъ болѣе общій случай, чѣмъ* α. Положеніе (A, β) при этомъ утверждается при нѣкоторыхъ, часто только подразумѣваемыхъ, условіяхъ. Объ этомъ въ дальнѣйшемъ ходѣ доказательства совершенно забывается, и положеніе (A, β) берется во всей его общности.

Я говорю, что эти ошибки въ математикѣ весьма часты и трудно избѣгаемы, такъ какъ, если бы математикъ всякій разъ упоминалъ объ ограниченіяхъ, которыя должны подразумѣваться, онъ сдѣлался бы слишкомъ скучнымъ и, утруждая вниманіе отклоненіями отъ основной темы, могъ бы проиграть въ ясности. Такъ математики говорятъ въ нѣсколькихъ главахъ о функціяхъ, подразумѣвая ихъ непрерывными, хотя объ этомъ ограниченіи упоминается только на первой страницѣ первой главы. О томъ, что функція принадлежитъ къ типу аналитическихъ функцій, объ этомъ иногда и не говорится совсѣмъ, считая вполнѣ естественнымъ такое предположеніе.

Ясно, что предпринимающій дальнѣйшія изслѣдованія читатель можетъ совершенно забыть объ этихъ ограниченіяхъ, въ особенности, если примѣненіе положеній, годныхъ только при этихъ ограниченіяхъ къ общему случаю, не только не приводитъ его ни къ какимъ противорѣчіямъ, но и открываетъ новое широкое поле изслѣдованій.

Къ этимъ типамъ математическихъ ошибокъ слѣдуетъ присоединить еще третій: *ошибки въ обозначеніяхъ.*

Какой-нибудь объектъ A *обозначается знакомъ* a, *другой* B *знакомъ* в. *Если между* a *и* в *есть сходство, то память можетъ спутать и относить* в *къ* *A* *и* a *къ* B. *Причина смѣшенія можетъ быть въ воспріятіи: одинъ знакъ можно просто принять за другой.*

Можно, напримѣръ, греческую α принять за латинское a. Въ то время, какъ указанные выше два типа ошибокъ представляютъ ошибки памяти, ошибки послѣдняго типа во второй своей формѣ представляютъ уже ошибки вниманія.

Мы еще укажемъ одинъ типъ ошибокъ вниманія, совершенно иного рода.

Знакомому съ научными математическими мемуарами хорошо извѣстно, что въ этихъ мемуарахъ доказывается не все; вѣдь въ противномъ случаѣ и маленькій мемуаръ выросъ бы въ цѣлый томъ. Не доказываются мелочи, не доказываются такія утвержденія, въ которыхъ каждому опытному читателю не доставляетъ большого труда убѣдится. Такимъ образомъ, нѣкоторыя звенья въ цѣпи умозаключеній пропускаются, ихъ слѣдуетъ вставить уже самому читателю.

Но намъ кажется, что такимъ же образомъ до извѣстной степени поступаетъ не только читатель, но и самъ авторъ.

Доказательство теоремы составляется слѣдующимъ образомъ. Сперва эскизы, намѣчаются главные пункты, которые слѣдуетъ доказать. Доказываются сперва они вчернѣ, т.-е. такъ, что детали пока остаются безъ разсмотрѣнія, остается еще кое-что спорное, кое-что недоказанное. Только постепенно обезвреживаются всевозможныя возраженія и производится провѣрка различныхъ второстепенныхъ утвержденій. При нѣсколько разъ производимой провѣркѣ всего построенія, мы не разбираемся въ нѣкоторыхъ выставленныхъ нами положеніяхъ, доказательство которыхъ намъ представляется простымъ и обычнымъ, мы проходимъ мимо нихъ съ мыслью, что здѣсь именно все обстоитъ благополучно, не воспроизводя для каждаго изъ нихъ всего доказательства. Случается, что даже при послѣдней окончательной провѣркѣ мы оказываемъ то же пренебреженіе на видъ обычнымъ и простымъ положеніямъ, но таящимъ въ себѣ смертельный ядъ и гибель для всего организма нашего построенія.

Иногда къ подобному пренебреженію деталями насъ склоняютъ и другіе факторы. Въ геометріи, напримѣръ, такую роль можетъ играть чертежъ, на которомъ случайно пересѣклись какія-нибудь двѣ прямыя, пересѣченіе которыхъ намъ представляется очевиднымъ въ томъ смыслѣ, что доказательство этого такъ просто и обычно, что нечего себя на немъ утруждать.

Не такого ли рода ошибка Декарта, утверждавшаго, что нормали къ двумъ плоскимъ кривымъ, именно къ проэкціямъ, линіи двоякой кривизны, сами будутъ проэкціями нормали этой кривой. Вотъ психологія подобной ошибки:

1) Доказательство этого невѣрнаго положенія показалось Декарту настолько же простымъ, насколько просто доказательство подобнаго положенія для касательныхъ.

2) Весьма вѣроятно, что въ этомъ его убѣдило и неправильно представленное геометрическое построеніе.

Подобнаго рода ошибки могутъ быть и при вычисленіи, когда отбрасываемъ различные члены въ видѣ упрощенія. Намъ кажется очевиднымъ, что такое отбрасываніе мало повліяетъ на результатъ, при чемъ кажется, что доказательство этого такъ просто, что не стоитъ на немъ останавливаться, а между тѣмъ это часто ведетъ къ роковымъ ошибкамъ.

§ 17. Умъ математика, какъ умъ дедуктивный.

Существуютъ помимо намѣченныхъ выше типовъ еще два типа, на которые принято дѣлить умы и таланты. Эти два типа выражаются терминами: *дедуктивный и индуктивный*. Къ первому типу относятъ математиковъ и философовъ.

«Важнѣйшія индивидуальныя различія,—говоритъ Вундтъ [1])—въ направленіи умственной дѣятельности обусловливаются *соединеніемъ извѣстныхъ сторонъ способности воображенія съ извѣстными сторонами способности собственно мыслительной*. Происходящее

[1]) Физіолог. Психологія II т. гл. XVIII.

отсюда умственное предрасположеніе называется обыкновенно талантомъ. Соотвѣтственно двумъ направленіямъ воображенія и двумъ направленіямъ ума можно резличать 4 главныхъ формы таланта».

О различныхъ типахъ воображенія мы уже говорили выше.

Направленіе же ума по Вундту слѣдующее: *Индуктивный* умъ склоненъ связывать отдѣльные факты, т.-е. отдѣльные объекты нашихъ представленій въ формы понятій. *Дедуктивный* же умъ, напротивъ, въ высшей степени склоненъ подводить отдѣльные факты подъ общія формы, созданныя мышленіемъ. Первый стремится собрать наблюденія и обобщить ихъ, второй выводитъ слѣдствіе изъ общихъ понятій и правилъ, или, взявъ общій принципъ, разлагаетъ его на отдѣльные частные случаи. Если классификація умовъ по типамъ воображенія представляетъ классификацію по способностямъ, то дѣленіе на умъ индуктивный и дедуктивный отвѣчаетъ скорѣй дѣленію по *склонностямъ. Способности къ чистой дедукціи или силлогизму*, какъ главному двигателю ея, *нѣтъ*. Не требуется особой способности, чтобы изъ фактовъ: люди смертны и Петръ человѣкъ, вывести, что Петръ умретъ. Трудность дедуктивнаго мышленія состоитъ въ направленіи ряда силлогизмовъ къ намѣченной цѣли, въ подведеніи даннаго случая подъ тотъ изъ болѣе общихъ, къ каждому изъ которыхъ онъ принадлежитъ, который приводилъ бы къ рѣшенію интересующихъ мыслителя проблемъ. Иначе говоря, *отъ дедуктивнаго мыслителя требуются только тогда особыя способности, когда онъ перестаетъ быть дедуктивнымъ мыслителемъ*.

Вѣдь для такой цѣли, какъ мы выше видѣли, умъ пользуется воображеніемъ, индукціей и аналогіей. Поэтому нельзя противополагать математика и философа натуралисту, какъ умы способные къ двумъ противоположнаго рода операціямъ: дедукціи и индукціи. Математикъ въ своей закулисной работѣ—мыслитель индуктивный; различіе его способностей отъ способностей натуралиста лежитъ только въ специфическихъ видахъ воображенія и въ способности приводить въ движеніе при закулисной работѣ безсознательную мысль въ самыхъ широкихъ размѣрахъ.

Классификація умовъ и талантовъ на дедуктивные и индуктивные, такимъ образомъ, есть классификація по склонностямъ ума. Какъ мы выше сказали, такія склонности могутъ обусловливаться характеромъ человѣка.

§ 18. Нѣкоторыя соображенія, относящіяся къ памяти вообще.

Мы уже упомянули, что характеръ воображенія зависитъ отъ свойства памяти. Для воспроизведенія пережитыхъ впечатлѣній мыслителемъ необходима память, при чемъ именно такая, которая могла бы вызвать именно того рода впечатлѣнія, которыя относятся къ области его мышленія. Музыкальное воображеніе не можетъ существовать безъ музыкальной памяти. Математическое воображеніе не можетъ быть безъ математической памяти. Поэтому вполнѣ естественно, коснувшись специфическихъ свойствъ математическаго воображенія, перейти къ анализу математической памяти.

Этому анализу мы предпосылаемъ нѣкоторыя соображенія, относящіяся къ памяти вообще.

Необходимымъ условіемъ мышленія во всѣхъ ея разновидностяхъ является память, которая, какъ цементъ, связываетъ различные звенья мыслительнаго процесса.

Въ памяти могутъ быть отмѣчены три момента:

1) *Усвоеніе памятью извѣстнаго состоянія.*
2) *Сохраненіе воспринятаго въ потенціальной формѣ.*
3) *Воспроизведеніе его.*

Различныя ощущенія, чувства и мысли могутъ нами запоминаться съ различной степенью легкости на различные сроки, съ различной ясностью сохраняться въ памяти и, наконецъ, болѣе или менѣе легко могутъ быть ею вызваны.

Мы различаемъ первый и второй моментъ, какъ два различныхъ момента. Нѣкоторыя состоянія, хотя и вполнѣ нами сознаваемыя, могутъ совершенно быть не усвоенными памятью. Произнесенное подъ рядъ большое число цифръ или словъ не можетъ быть нами воспроизведено, хотя бы мы пожелали это сдѣлать тотчасъ по ихъ произнесеніи. Этотъ актъ усвоенія содержанія сознанія памятью отнюдь не тождественъ съ переходомъ даннаго состоянія за порогъ сознанія. Произносимыя слова ясно сознаются нами не только, какъ совокупность опредѣленныхъ звуковъ, но какъ знаки опредѣленно и ясно сознаваемыхъ нами понятій.

Если взять обычное сравненіе памяти съ отпечаткомъ на мягкой поверхности, то безсознательному акту будетъ соотвѣтствовать движеніе отпечатываемаго предмета въ нѣкоторомъ отдаленіи отъ этой поверхности, сознательному акту, не усвояемому памятью, соприкосновеніе съ данной поверхностью безъ оставленія на ней слѣда. Если же предполагать, что тотъ же предметъ производитъ давленіе на эту поверхность, то соотвѣтственно тому, принадлежитъ ли эта поверхность вполнѣ упругому тѣлу, послѣ давленія возвращающемуся тотчасъ къ первоначальной формѣ, или въ силу нѣкоторой неупругости оставляющему на себѣ слѣдъ отъ давленія, мы получаемъ два явленія, отвѣчающія или одному первому моменту или совокупности двухъ первыхъ.

Мысля, мы связываемъ памятью различныя звенья мыслительнаго процесса. Для того, чтобы вывести умозаключеніе, нужно помнить, покуда оно не выведено, отдѣльныя посылки. Эту самую первичную форму памяти, которая проявляется въ каждомъ, даже наиболѣе грубомъ, мыслительномъ процессѣ и дѣйствіе которой не идетъ дальше простого связыванія отдѣльныхъ моментовъ мышленія, мы называемъ *элементарной памятью* [1]).

Въ элементарной памяти, позволяющей перейти отъ одной посылки къ послѣдующей, второй моментъ, можно сказать, почти исчезаетъ, получаемый промежуточный членъ усваивается для того, чтобы тотчасъ воспроизвестись и затѣмъ подвергнуться забвенію. Для того, чтобы хорошо мыслить, необходимо, чтобы весь мыслительный процессъ представлялъ неразрывную и крѣпкую цѣпь, необходима извѣстная чувствительность нѣкоторыхъ нервныхъ элементовъ, но эти послѣдніе могутъ обладать большой степенью упругости и могутъ воспроизводить данное состояніе достаточно сильно только въ скоромъ времени отъ момента усвоенія, сохраняя эти состоянія на болѣе или менѣе долгое время. Для того, чтобы шахматистъ игралъ хорошо или математикъ хорошо вычислялъ, необходимо, чтобы первый помнилъ свои ходы, а второй свои числа; но по окончаніи игры или вычисленія и тѣ и другіе могутъ совершенно стереться изъ памяти.

Большимъ или меньшимъ развитіемъ способности сохраненія даннаго воспріятіемъ содержанія обусловливается развитіе чело-

---

[1]) Сравненіе Рибо памяти съ кладовой, гдѣ въ отдѣльныхъ ящикахъ сохраняются всѣ наши свѣдѣнія, не подходитъ къ элементарной памяти. Для объектовъ послѣдней не существуетъ ящиковъ. Эта память скорѣе похожа на выгрузочную станцію, гдѣ товаръ выгружается съ одного поѣзда на другой, чтобы тотчасъ оставить эту станцію.

вѣка. Въ то время, какъ для человѣка дѣла эта способность не играетъ существенной роли, ученый безъ памяти, какъ хранилища необходимыхъ познаній, является совершенно безсильнымъ.

§ 19. Удерживающая память математика.

Но не у всѣхъ ученыхъ *удерживающей* памяти дано то же значеніе. Ясно, что чѣмъ болѣе связи между различными объектами, запечетлѣваемыми памятью, тѣмъ легче ихъ запомнить. Всякая связь дѣлаетъ необходимымъ запоминаніе только части ихъ числа, такъ какъ часть можетъ уже безъ усилія воли вызвать и всю остальную совокупность. Математику нѣтъ необходимости удерживать въ памяти все доказательство теоремы, необходимо лишь помнить исходный и конечный пунктъ и идею доказательства.

Правда, ученый математикъ долженъ удерживать въ памяти огромное число формулъ и методъ, но объемъ его памяти долженъ быть гораздо меньше, чѣмъ у натуралиста или историка.

Въ то время, какъ математикъ, утерявъ въ памяти что-либо, можетъ это *искать*, возстановляя промежуточныя логическія звенья между вспомянутымъ и забытымъ, натуралистъ, историкъ, химикъ и т. д., имѣя часто дѣло съ совершенно обособленными и ненаходящимися между собой въ связи объектами, должны совершенно въ этомъ отчаяться.

Быстрое соображеніе, дающее возможность произвести подобные розыски въ самое короткое время, позволяетъ математику и при сравнительно ничтожномъ объемѣ удерживающей памяти хорошо мыслить, между тѣмъ какъ, напр., натуралистъ безъ памяти огромнаго числа фактовъ и терминовъ своей обширной номенклатуры совершенно безсиленъ.

Отъ памяти математика требуется главнымъ образомъ чувствительность, требуется, чтобы она быстро усвояла каждое звено той длинной цѣпи, черезъ которую проходитъ мысль, и чтобы быстро и въ неискаженномъ видѣ воспроизводила его при переходѣ къ послѣдующимъ звеньямъ.

Отъ математика требуется главнымъ образомъ элементарная, а не удерживающая память, требуется не 2-ой, а 1-ый и 3-ій вышеупомянутые моменты акта запоминанія.

Взявъ приведенное выше сравненіе, можно сказать, что память математика должна быть подобна гибкой и упругой поверхности.

§ 20. Различные роды памяти.

Нельзя сказать, что въ этомъ исключительно состоитъ отличіе математической памяти.

Нельзя сказать, что память совершенно равнодушна къ содержанію.

Иной легко запоминаетъ музыкальные мотивы, другой, лишенный этой способности, быстро запоминаетъ цифры.

Правда, память, какъ мускулы, развивается упражненіемъ, но для существованія памяти къ извѣстному классу воспріятій необходима все-таки наличность нѣкоторыхъ элементовъ. Извѣстно, что съ музыкальной памятью родятся, и изъ двухъ братьевъ, слышавшихъ одни и тѣ же мотивы, одинъ можетъ запомнить всѣ, а другой ни одного.

«Фактическія данныя современной психологіи,—говоритъ Рибо [1]),—говорятъ противъ воззрѣнія, приводимаго Дюгальдомъ Стюартомъ, что неравенства въ способности сохраненія памятью состояній различныхъ типовъ зависитъ отъ неравенства употребляемаго нами вниманія по отношенію къ различнымъ предметамъ и выбора, который умъ дѣлаетъ изъ явленій и вещей, обращающихъ на себя вниманіе. Мы имѣемъ случаи удивительной зрительной памяти художниковъ Горація Вернэ и Густава Дорэ, рисующихъ портреты на память, шахматистовъ, могущихъ à l'aveugle играть нѣсколько партій, знаменитыхъ счетчиковъ въ родѣ Діаманди и Иноди, производящихъ въ умѣ большія вычисленія»...

«Психологическій анализъ такимъ образомъ показываетъ, что не существуетъ единичной памяти, а есть только память множественная; точно также нѣтъ и какого-либо опредѣленнаго мѣстонахожденія памяти, а есть столько различныхъ мѣстъ, сколько различныхъ видовъ памяти». Воспоминаніе вовсе не находится, какъ часто говорятъ, въ душѣ, оно пребываетъ въ мѣстѣ своего возникновенія въ той или другой части нервной системы.

---

[1]) *Рибо*. „Память въ ея нормальномъ и болѣзненномъ состояніи", стр. 55.

Для такого рода частныхъ памятей необходимо поэтому особое анатомическое устройство соотвѣтственно данному чувству, напр., органа зрѣнія.

§ 21. Классификація родовъ памяти.

Какая память главнымъ образомъ свойственна математику? Психологическій анализъ не можетъ удовольствоваться однимъ признаніемъ существованія специфической математической памяти, онъ долженъ изслѣдовать простѣйшіе элементы, на которые разлагается этотъ сложный психическій актъ, давъ возможность съ различныхъ точекъ зрѣнія отнести ее къ болѣе общимъ видамъ памяти.

Прежде, чѣмъ провести на нашъ взглядъ наиболѣе естественную классификацію видовъ памяти, мы сдѣлаемъ одно замѣчаніе, на первый взглядъ представляющееся парадоксальнымъ.

Память не сохраняетъ непосредственно отвлеченныхъ понятій; она сохраняетъ лишь ощущенія, которыя при своемъ воспроизведеніи заставляютъ насъ мыслить объ этихъ понятіяхъ.

Процессъ воспоминанія представляетъ движеніе отъ центральной нервной системы къ периферической, гдѣ, по мнѣнію Рибо, мы и находимъ искомое, но, прибавимъ, не мысль, а лишь отпечатокъ пережитого периферическимъ нервомъ ощущенія, и только черезъ обратное центро-стремительное движеніе воскресаетъ понятіе. Желая вспомнить, въ чемъ состоитъ система Спинозы, мы вспоминаемъ раньше термины: субстанція, атрибутъ, модусъ и т. д., которыми пользовался Спиноза, и только затѣмъ постепенно по ассоціаціи идей воскресаютъ въ нашей головѣ различные пункты его системы. Желая вспомнить математическую теорему, мы сперва вспоминаемъ или алгебраическую формулу или чертежъ.

Такой взглядъ насъ склоняетъ къ признанію *столькихъ видовъ памяти, сколько существуетъ видовъ ощущеній.* Но помимо этого за ту же классификацію говорятъ и факты, ясно обнаруживающіе специфическій и независимый характеръ, слуховой, зрительной и т. д., къ отдѣльнымъ видамъ ощущеній относящихся памятей. А, именно, возможно, напримѣръ, существованіе сильной слуховой памяти при слабой зрительной и обратно.

Итакъ, мы говоримъ: *существуютъ памяти: слуховая, зрительная, обонятельная, осязательная, вкусовая и мышечная.*

Содержаніе обонянія, вкуса и осязанія является слишкомъ рѣдкимъ предметомъ отвлеченнаго мышленія.

Слова запоминаются нѣкоторыми лицами *слуховой* памятью, такъ что они вспоминаютъ ухомъ, такъ сказать, слышатъ то слово, которое желаютъ вспомнить. Другія лица, вспоминая, вызываютъ зрительный образъ написаннаго слова. Это лица съ преимущественнымъ развитіемъ *зрительной* памяти. Къ этимъ двумъ типамъ, отмѣченнымъ нѣкоторыми психологами, присоединяемъ еще третій, когда запоминаются не звуки, не изображеніе ряда буквъ, а манера писать данное слово, т.-е. рядъ мышечныхъ ощущеній руки. Этому типу свойственна *мышечная память.*

Въ виду того, что форма и размѣры предмета познаются, какъ собственно зрительными ощущеніями, т.-е. дѣйствіемъ на нервные элементы, соединенные съ сѣтчатой оболочкой глаза, такъ и мышечными чувствами, непосредственно связанными съ аккомодаціей и конвергенціей глаза, то и память о формѣ и размѣрахъ предметовъ можетъ быть какъ зрительной, такъ и мышечной, вслѣдствіе чего легко возможно смѣшеніе обоихъ видовъ памяти.

Пространственная память или память на взаимное расположеніе предметовъ въ пространствѣ (въ частномъ случаѣ ихъ разстояніе) есть частный случай мышечной памяти.

§ 22. Пространственная память математика.

Геометру необходима именно этого рода, т.-е. *пространственная память*; его элементарная память должна быстро усваивать и легко воспроизводить геометрическія построенія.

Память геометра не зрительная память, геометръ не помнитъ зрительный образъ чертежа, онъ помнитъ только *взаимное расположеніе линій и поверхностей или ихъ частей.*

Слѣдуетъ замѣтить, что, хотя память зрительная и пространственная представляютъ различные виды памяти, какъ различны ощущенія цвѣта и ощущенія мышечныя, тѣмъ не менѣе они могутъ быть смѣшаны. Организмъ человѣка не имѣетъ безупречной гармоніи въ томъ смыслѣ, что ко всякому движенію, направленному къ извѣстной цѣли, присоединяются вторичныя автоматическія движенія, которыя отъ низшей стадіи развитія до высшей постепенно сокращаются, никогда впрочемъ окончательно не уничтожаясь.

Ребенокъ, начинающій писать, совершенно не можетъ производить движенія только рукой, онъ двигаетъ, обыкновенно, и языкомъ, и мускулами лица, и даже ногой, но мало-по-малу онъ перестаетъ дѣлать эти излишнія движенія. Точно такимъ же образомъ, желая запомнить фигуру, мы запоминаемъ невольно и цвѣта и тратимъ на послѣднее напрасно психическую энергію. Безспорно, что у шахматиста, какъ и математика, центръ тяжести лежитъ въ пространственной памяти, но къ ней частью примѣшивается и зрительная.

Впрочемъ, въ иныхъ случаяхъ тѣ движенія, которыя являются до извѣстнаго момента вторичными, могутъ потомъ замѣнить главныя. Душа, стремясь по линіи наименьшаго сопротивленія, можетъ поступить такимъ образомъ съ цѣлью легчайшаго достиженія извѣстной цѣли.

«Между шахматистами-игроками,—говоритъ Бинэ [1]), имѣющими способность играть, не глядя на доску, существуетъ огромное число говорящихъ, что во время игры они воображаютъ шахматную доску и фигуры, какъ будто бы ихъ видѣли. Иные видятъ формы фигуръ, даже цвѣтъ».

Бинэ называетъ ихъ память *конкретной зрительной* памятью.

По нашему мнѣнію, цвѣтъ и фигуры въ большинствѣ случаевъ это только вторичная память. Игроку достаточно помнить расположеніе коня относительно пѣшки, но не цвѣтъ или тѣ или другія особенности формы этихъ фигуръ. Зрительная память такимъ образомъ большей частью здѣсь является безполезной, но съ другой стороны бываетъ, что съ ея помощью мысль игрока безсознательно выбираетъ кратчайшій легчайшій способъ фиксированія и различенія фигуры. Ей нѣтъ необходимости всегда помнить ходъ; ей достаточно до поры, до времени помнить только цвѣтъ и хотя бы въ очень неясной формѣ фигуру и и только въ случаѣ необходимости по цвѣту и фигурѣ возстановлять ея ходъ. Впрочемъ, въ виду того, что нѣсколько пѣшекъ, два коня, двѣ туры и т. д. одного цвѣта, необходимы еще

1) *Binet*. Memoire visuelle géometrique. Revue Philosophique, 1893, № 1.

другіе признаки ихъ различенія, которые вѣроятно всегда исключительно пространственнаго характера, такъ правая тура, т.-е. стоящая съ правой руки, отличается отъ лѣвой.

Эту конкретную зрительную память Бинэ отличаетъ отъ *зрительной геометрической* памяти тѣхъ шахматистовъ, которые, воображая шахматную доску, не видятъ ни цвѣта, ни формъ фигуры.

Единственнымъ различіемъ фигуры является тотъ путь, который она должна сдѣлать, чтобы достигнуть арміи непріятеля. Такая зрительная геометрическая память сводится къ почти чистой пространственной памяти; зрительная память имѣетъ очень слабый эффектъ.

Тѣмъ не менѣе она дѣйствуетъ побочно и воспоминаніемъ ходовъ различныхъ фигуръ воскрешаетъ видъ шахматной доски; эти шахматные игроки все-таки видятъ.

Изслѣдованіе Бинэ устанавливаетъ, что къ пространственной памяти шахматиста примѣшивается еще зрительная. Тотъ же фактъ имѣетъ мѣсто и у геометра. Вспоминая доказательство какой-либо теоремы, онъ мысленно чертитъ чертежъ, такимъ именно образомъ и вспоминается взаимное расположеніе его частей; въ этомъ воспоминаніи непрерывнаго ряда мышечныхъ ощущеній и состоитъ геометрическая память. Но къ этой памяти безусловно, какъ въ вышеприведенномъ примѣрѣ шахматиста, примѣшивается и зрительная память. Геометръ часто видитъ чертежъ, какъ видитъ шахматистъ доску при обѣихъ разновидностяхъ шахматной памяти.

Здѣсь, какъ и въ мышленіи шахматиста, могутъ быть какъ полезные, такъ и вредные элементы. Вмѣстѣ съ необходимымъ запоминаются и затѣмъ воспроизводятся памятью обозначенія различныхъ точекъ и угловъ и другія детали, являющіяся лишь балластомъ при мышленіи. Но иногда переходъ отъ мысленнаго черченія къ видѣнію есть актъ полезный для души: это безсознательный выборъ линіи наименьшаго сопротивленія.

Въ то время, какъ пространственная память разлагается на рядъ мышечныхъ ощущеній во времени и подобно осязанію ощупываетъ предметъ, зрѣніе его схватываетъ во всей его цѣлости. Мысленное черченіе даетъ намъ дѣйствительно чертежъ, который мы видимъ въ воображеніи и который можетъ сохраняться зрительной памятью.

Сдѣлаемъ еще одно важное замѣчаніе, относящееся къ математической памяти.

На первый взглядъ представляется, что математикамъ свойственны два рода памятей: память геометрическая т.-е. память къ геометрическимъ построеніямъ и алгебраическая, т.-е. память къ алгебраическимъ формуламъ и цифрамъ.

Но мы думаемъ, что память алгебраическая ничѣмъ существенно не отличается отъ геометрической, и представляетъ ту же пространственную память.

Мы вѣдь запоминаемъ не зрительный образъ формулы

$$(a+в)^2 = a^2 + 2aв + в^2$$

$$\frac{a^2 - в^2}{a - в} = a + в \text{ и т. д.,}$$

а запоминаемъ эти формулы совершенно такъ же, какъ геометрическія построенія, т.-е. какъ извѣстное расположеніе буквъ а, $в$ и цифры 2 по отношенію другъ къ другу.

То же самое относится и къ цифровой памяти.

§ 23. Педагогическое значеніе математики.

Въ связи съ психологическимъ изслѣдованіемъ математической способности находится разрѣшеніе вопроса о педагогическомъ значеніи преподаванія математики.

Специфическій характеръ математической способности является причиной существованія у нѣкоторыхъ лицъ другихъ умственныхъ способностей, значительно превосходящихъ норму, съ почти полнымъ отсутствіемъ математическихъ способностей. Достаточно вспомнить два глубоко-философскихъ ума, широкія области которыхъ, хотя и соприкасались между собой, но въ общемъ не совпадали. Я говорю о Гёте и Дарвинѣ.

Болѣе того, наше изслѣдованіе намъ показало, что философскій и математическій умы обладаютъ психологическими элементами, находящимися другъ съ другомъ въ антагонизмѣ. Философу, мысль котораго работаетъ всецѣло въ лучахъ сознанія, могутъ показаться математическія открытія рядомъ какихъ-то фокусовъ. Онъ согласится съ доказательствами математика, но ему покажется естественнымъ задать вопросъ (какъ Шопенгауэръ), отчего при доказательствѣ теоремы проводятъ ту или другую линію, и онъ не удовлетворится разъясненіемъ, что такое дѣйствіе потомъ приведетъ къ желанной цѣли. Вѣдь мы покуда ведемъ изслѣдованіе, скажетъ онъ, еще не знаемъ этой цѣли. Что это за суфлеръ, который раньше времени намъ все подсказываетъ? Этотъ суфлеръ, какъ мы показали выше, это неточное мышленіе, глубоко заходящее въ подсознательныя области.

Повторяемъ, математикъ подобенъ музыканту, который часть своихъ быстрыхъ и ловкихъ движеній долженъ совершать безсознательно, и для котораго сознаніе можетъ явиться лишь тормазомъ.

Математикъ мыслитъ быстро, математику присуще остроуміе, но *мы неможемъ назвать математическій умъ умомъ высшей цѣнности.*

Математическій умъ не видитъ того, что видитъ умъ философскій. Онъ не видитъ, да и не стремится увидѣть весь предметъ; онъ видитъ только часть его, ту часть, которая служитъ какъ бы крючкомъ, за который онъ прицѣпляетъ тѣ логическія цѣпи, при помощи которыхъ желаетъ связать все имъ мыслимое.

Обычное заблужденіе, присущее математикамъ, состоитъ въ смѣшеніи всего предмета съ этой небольшой частью, доступной ихъ взору, въ смѣшеніи математическихъ опредѣленій, скользящихъ, такъ сказать, только по поверхности, съ самой сущностью предмета. Развѣ понятіе о вѣроятности совпадаетъ съ понятіемъ о нѣкоторой дроби, которая служитъ въ математикѣ опредѣленіемъ вѣроятности? Понятіе о кривизнѣ шире, чѣмъ то опредѣленіе, которое даетъ геометрія. Математики съ трудомъ могутъ примириться, чтобы даже въ геометрическихъ аксіомахъ находилось что-либо, не поддающееся математической формулировкѣ, что-либо кромѣ крючковъ, за которые можно было бы привѣсить длинную цѣпь доказательствъ. Знаменитый математикъ Пуанкарэ[1]) доходитъ до того, что совершенно забываетъ созерцательный характеръ геометрическихъ аксіомъ и считаетъ ихъ за скрытыя опредѣленія... ergo, между геометріями 4-хъ и 3-хъ измѣреній нѣтъ существенной разницы!

Такимъ образомъ умъ въ своемъ *сознательномъ* развитіи, въ стремленіи обнять окружающій міръ болѣе глубокимъ и широкимъ взоромъ не найдетъ себѣ въ математикѣ подходящей

[1]) „Гипотеза и наука“.

сферы. Такой умъ долженъ необходимо выйти за границы логическихъ опредѣленій и математическихъ терминовъ и доказательствъ, онъ долженъ видѣть въ предметѣ также и то, что не можетъ быть выражено никакими математическими формулами, то, для чего не только формула, но и слово можетъ служить только намекомъ.

Такимъ образомъ математическія способности ненадежное мѣрило цѣнности ума.

Такое мѣрило аналогично оцѣнкѣ богатствъ человѣка по одному количеству десятинъ земли, забывая другое движимое и недвижимое имущество, которое можетъ существовать совершенно независимо отъ земли и давать еще лучшій доходъ. Специфическій характеръ математической способности дѣлаетъ математику доступной не всѣмъ: нѣкоторый и довольно большой процентъ ея совершенно не понимаетъ, у нѣкоторыхъ изученіе ея почти сводится къ одному заучиванію механическихъ дѣйствій надъ символами.

Чисто интеллектуальный ея характеръ, не говорящій ничего чувству, дѣлаетъ ее интересной только крайне ограниченному кругу учениковъ.

Такимъ образомъ не всѣ ею могутъ заниматься и очень немногіе желаютъ ею заниматься.

Поэтому въ общемъ циклѣ преподаванія въ общеобразовательныхъ заведеніяхъ (а таковыми должны быть среднія учебныя заведенія) *математическія науки не должны представлять основу общаго средняго образованія*. Мы должны стараться, чтобы въ предметахъ ближайшихъ къ математикѣ (таковы физика, космографія) и неспособный къ математикѣ пріобрѣталъ максимумъ познаній.

Педагогическое значеніе предмета можетъ быть трояко:

1) предметъ можетъ быть полезенъ,

2) можетъ давать гимнастику ума, упражненіемъ развивающую его гибкость и другія качества,

3) можетъ развивать, расширяя кругозоръ учащагося.

Удовлетворяя первымъ двумъ требованіямъ, математика врядъ ли удовлетворяетъ третьему.

Едва ли математика, этотъ фундаментъ, но не вершина наукъ, можетъ расширить кругозоръ. Можно знать математику и кромѣ нея не знать ни одной науки. Между тѣмъ, какъ физику необходимо до извѣстной степени знать такъ же и математику.

Существованіе совершенно юныхъ математическихъ геніевъ вродѣ 12-лѣтняго Клеро, представляющаго свой мемуаръ академіи, или 20-лѣтняго Галуа, создающаго одинъ изъ величайшихъ отдѣловъ алгебры, указываетъ при какомъ узкомъ кругозорѣ можно быть не только хорошимъ, но и геніальнымъ математикомъ.

Мы слишкомъ далеки отъ мнѣнія Платона, начертавшаго при входѣ въ свою академію слова: «Αγεωμέτρητος μηδείς εἴσιτω» (да не входитъ не знающій геометріи). Если бы въ душѣ самого хозяина академіи не уживался рядомъ съ геометромъ еще поэтъ, который контрабандой, вопреки вывѣскѣ вошелъ въ академію, то мы не имѣли бы Платоновской философіи. Но этотъ случай уживанія въ одной душѣ геометра и поэта, создающаго двойственность души, случай очень рѣдкій, явленіе вродѣ двойственности сознанія. Обыкновенно звукъ каждой изъ этихъ струнъ души заглушаетъ другую.

Не полагая математику основой средняго образованія, мы тѣмъ не менѣе далеки отъ взгляда Шопенгауэра, по мнѣнію котораго единственная непосредственная польза математики заключается въ томъ, что она можетъ пріучить разсѣянный и легкомысленный умъ сосредоточивать свое вниманіе.

Главное педагогическое значеніе математики состоитъ въ томъ, что въ математикѣ преимущественно передъ другими предметами ученику предоставляется самостоятельная умственная работа.

Въ другихъ предметахъ ему главнымъ образомъ приходится *понимать мысли другихъ*, въ математикѣ при рѣшеніи задачъ ему приходится мыслить самостоятельно.

Д. Мордухай-Болтовской.